ORSAY
Série A, N°
N° D'ordre :
115

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DE PARIS XI
CENTRE D'ORSAY

pour obtenir le ~~grade~~ titre de

Docteur d'Université ~~ès Sciences Physiques~~

par

Ramon FERNANDEZ ALVAREZ-ESTRADA

Sur la Construction des Amplitudes de Diffusion à partir de l'Analyticité et des Données Expérimentales

Soutenue le 1971 devant la Commission d'Examen

MM. F. LURÇAT — *Président*

K. CHADAN, *R. NATAF* — *Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je remercie Messieurs les Professeurs B. Jancovici et Ph. Meyer d'avoir bien voulu m'accueillir au Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies.

Je suis reconnaissant à Messieurs les Professeurs K. Chadan, M. Gourdin et F. Lurçat pour m'avoir facilité, par leur accueil, l'élaboration et la présentation de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Messieurs les Professeurs A. F. Ranada (Madrid) et K. Chadan pour de nombreuses discussions fructueuses et encourageantes.

Je remercie Messieurs les Professeurs D. Atkinson, M. Gourdin, J. Hamilton, A. Martin, R. Omnès, Messieurs A. Capella, J. L. Gervais, A. de Rujula et J. L. Sanchez-Gomez, et quelques autres personnes, pour de fréquentes et utiles discussions sur les différentes parties de mon travail.

Enfin, je dois exprimer ma reconnaissance à ma femme et à quelques autres personnes pour leur aide inappréciable.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550028_0008

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I - Introduction et plan de travail

Première Partie

CHAPITRE II - Représentations analytiques

2 - A - Représentations de module pour un demi-plan
2 - B - Représentations de module pour une fonction avec deux coupures
2 - C - Représentations de phase.

CHAPITRE III - Diffusion non-relativiste par un potentiel

CHAPITRE IV - La diffusion πN

4 - A - Les amplitudes de transversité pour $\pi^{\pm} p \to \pi^{\pm} p$ et pour $\bar{p}p \to \pi^+ \pi^-$

4 - B - Représentation pour les amplitudes de transversité dans le Laboratoire.

CHAPITRE V - Superconvergence pour la représentation de module.

CHAPITRE VI - Les zéros pour une diffusion vers l'avant.

CHAPITRE VII - Quelques approximations à haute énergie.

CHAPITRE VIII - Une règle de somme pour une diffusion vers l'avant.

CHAPITRE IX - Nouvelles restrictions et règles de somme à partir de $\pi^- p \to \pi^0 n$.

CHAPITRE X - Quelques techniques d'extrapolation analytique

10 - A - Méthodes pour obtenir la contribution de la région non-physique et les zéros complexes

10 - B - Extrapolation aux régions physiques

CHAPITRE XI - La diffusion nucléon-nucléon.

Deuxième Partie

CHAPITRE XII - L'équation intégrale de Stieltjes et quelques solutions.

CHAPITRE XIII - Construction de l'amplitude non-relativiste

13 - A - Construction à partir de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ dans toute la région physiqu

13 - B - Construction à partir de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ dans une certaine partie de la région physique

13 - C - Construction à partir de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ à énergie infinie.

CONCLUSION ET REMARQUES FINALES.

REMERCIEMENTS.

REFERENCES.

FIGURES.

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET PLAN DE TRAVAIL

lère PARTIE

Il est bien connu que l'utilité des relations de dispersion employées habituellement pour la diffusion πN vers l'avant, en combinaison avec le théorème optique, permettent d'obtenir l'amplitude de diffusion vers l'avant [1]. Etant donné que, pour certaines diffusions à deux particules, comme c'est le cas des πN, la quantité des données expérimentales sur les sections efficaces différentielles non-polarisées et polarisées est, non seulement assez grande[2], mais qu'elle augmente, de jour en jour, on peut se demander, si les techniques et méthodes dispersives d'aujourd'hui, qui utilisent ces données expérimentales pour trouver les amplitudes de diffusion dans une direction quelconque (non vers l'avant), sont aussi puissantes que pour l'avant.

Même si l'utilisation des relations de dispersion vers l'arrière et à ondes partielles [3,4,5], a produit des résultats assez bons en relation avec la réalisation du but exprimé ci-dessus, on sait cependant que leurs possibilités décroissent quand l'énergie devient plus grande, car d'une part il manque la présence du théorème optique et, d'autre part, le nombre d'ondes partielles à considérer devient aussi plus grand.

Il nous semble que quelques possibilités assez intéressantes dans la théorie dispersive des diffusions n'ont pas encore été suffisamment étudiées. Ainsi, nous rappellerons que les représentations analytiques qui donnent la phase d'une fonction analytique à partir de ses zéros complexes et de son module dans l'axe réel, ont été proposées pour la matrice S, avec le moment angulaire défini[6,7], les facteurs de forme électromagnétiques [8,9,10] et l'amplitude de diffusion πN vers l'avant [11]. Il ne faut pas confondre ces nouvelles représentations, que nous appellerons "représentations de module" dans ce travail, avec les relations de dispersion ordinaires pour lesquelles les parties réelles sont exprimées en termes des parties imaginaires et des constantes de soustraction. Même si la connaissance des zéros complexes pose en général un problème (qui peut être résolu pour la diffusion vers l'avant au moyen des relations de dispersion vers l'avant)[12], ces représentations de module nous semblent intéressantes, car le module du facteur de forme ou de l'amplitude vers l'avant peut être mesuré, en principe, dans une région physique infinie. Le fait que cette

propriété est vraie pour une diffusion qui n'est plus vers l'avant, (ce qui peut être démontré trivialement pour une diffusion à particules sans spin), nous a conduit à faire une étude plus approfondie sur l'utilisation des représentations de module en vue de prédire les amplitudes pour une diffusion qui n'est plus vers l'avant. Ainsi, nous croyons que ces représentations sont plus appropriées pour étudier les diffusions vers l'avant et vers une direction quelconque de forme unifiée.

Quelques problèmes se posent en relation avec ce but :

1) L'existence des régions non-physiques finies, dans le cas d'une diffusion qui n'est pas vers l'avant (et même si elle l'est, comme dans le cas du nucléon-nucléon) et, par conséquent la possibilité de calculer sa contribution.

2) La détermination des zéros complexes pour une diffusion qui n'est pas vers l'avant.

3) La difficulté de répondre aux questions suivantes :
Comment tenir compte du spin, quand les différentes particules en ont ?
est-il encore possible de trouver des amplitudes de diffusion dont les modules peuvent être exprimés en fonction des grandeurs à mesurer expérimentalement dans des régions physiques infinies ?

4) Y-a-t-il des règles de somme reliant entre elles les données expérimentales, les contributions des régions non-physiques et les zéros, et pouvant être obtenues à partir de la représentation de module ?

5) Comment peut-on tenir compte de l'unitarité ?

6) A hautes énergies où l'analyse à ondes partielles est très difficile, serait-il possible et convenable d'utiliser la représentation de module ?

D'autre part, on sait que l'analyse fonctionnelle a donné quelques résultats sur l'existence des solutions de l'équation d'unitarité dans la région élastique, lorsque la section efficace différentielle est connue exactement et sans erreur.[13] Il nous semble alors intéressant de poursuivre ces recherches en vue d'étudier :

7) La possibilité de quelques méthodes générales (indépendantes d'un modèle physique particulier) pour trouver, de manière unique et complète, l'amplitude de diffusion dans le cas non-relativiste en faisant la combinaison :
i) de la connaissance des sections efficaces différentielles et totales, mesurées avec une précision infinie dans quelques régions d'énergie et du transfert d'impulsion,
ii) des principes généraux comme l'analyticité et l'unitarité. Ici, l'analyse à ondes partielles ne serait pas utilisée.

L'étude des problèmes exposés dans les paragraphes 1 à 7 est le but de ce travail que nous avons planifié comme suit :

lère Partie : (problèmes 1 à 6)

Le chapitre 2 contient les représentations de module et de phase pour une fonction analytique. Les résultats obtenus auparavant par d'autres auteurs sont, non seulement unifiés, mais aussi généralisés dans ce chapitre. L'intérêt de la représentation de phase est dû au fait qu'elle donne une représentation alternative pour l'amplitude de diffusion vers l'avant, en fonction des données expérimentales, lorsque le théorème optique est pris en compte. Pourtant, la représentation de phase n'a aucun intérêt dans une diffusion qui n'est pas vers l'avant, tout au moins pour le moment.

Le chapitre 3 est consacré à la diffusion non-relativiste d'une particule par un potentiel central. Quand certaines conditions sont remplies, on montre que l'amplitude de diffusion $f(s,t)$ (s et t étant l'énergie et le transfert d'impulsion, respectivement), a un nombre fini de zéros dans le plan complexe s. La représentation de module pour t fixé, ainsi que celle correspondant à la phase , à $t = 0$, sont proposées pour $f(s,t)$. Une discussion qualitative est faite sur la relation entre la phase de l'amplitude vers l'avant et le retard temporel dû à la diffusion, ce qui illustre quelques implications physiques des zéros. Ainsi, quelques propriétés caractéristiques de la représentation de module en relation avec les amplitudes de diffusion, sont déjà trouvées dans le cas non-relativiste.

Le chapître 4 traite de la diffusion πN élastique, où le problème du spin apparaît pour la première fois. La section 4.A introduit les amplitudes de transversité dans le repère du laboratoire pour résoudre le problème du spin. Ensuite, il est fait une étude sur leurs propriétés cinématiques et analytiques, ainsi que sur leur comportement sous le croisement. Dans la section 4.B, nous étudions quelqu'autres propriétés analytiques de ces amplitudes et nous établissons pour elles la représentation de module à transfert fixé et de phase vers l'avant.

En utilisant la diffusion πN très régulièrement et la diffusion non-relativiste par un potentiel moins souvent, les chapitres 6 à 10 nous présentent des méthodes et des formules pour obtenir les zéros complexes, la contribution de la région non-physique et, donc, les amplitudes de diffusion.

Le chapitre 5 contient une étude des représentations de module super-convergentes et des règles de somme super-convergentes impliquées par elles. Elles jouent, par rapport à la représentation de modèle habituelle, le rôle que joueraient les relations de dispersion et les règles de somme super-convergentes par rapport aux relations de dispersion ordinaires.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude d'une expression explicite des zéros complexes et des pôles correspondant aux particules en fonction des donnée expérimentales pour la diffusion vers l'avant. Ceci montre : i) l'utilité de tenir compte aussi de la représentation de phase, ii) les restrictions existant entre les différentes données expérimentales, si l'amplitude satisfait aux propriétés d'analyticité et d'unitarité considérées.

Dans le chapitre 7, nous étudions une approximation à haute énergie pour les amplitudes de diffusion en termes des données expérimentales à un facteur de phase près, qui est indépendant de l'énergie (mais dépendant du transfert d'impulsion).

Aux chapitres 8 et 9, nous présentons quelques nouvelles règles de somme pour la diffusion $\pi^{\pm} p$ qui sont une conséquence de l'analyticité, de la non-oscillation à l'infini et d'une hypothèse technique sur le comportement des données expérimentales à très haute énergie.

Au chapitre 10, nous montrons comment des techniques d'extrapolation analytique peuvent nous servir pour trouver, approximativement, les contributions des régions non-physiques, les zéros complexes et même les amplitudes de diffusion à des énergies moyennes ou hautes, à partir de la connaissance des ondes partielles dans la région de basse énergie. L'unitarité élastique est déjà prise en compte dans ces ondes partielles.

Au chapitre 11, nous discutons la généralisation des formules et méthodes antérieures au cas de la diffusion nucléon-nucléon. Le problème du spin est résolu aussi, tout en reconnaissant que certaines des techniques présentées dans ce travail ne seront plus applicables pour le moment, car on ne connaît pas suffisamment, soit les données expérimentales, soit les ondes partielles. Pourtant, nous trouvons une conséquence importante dans l'étude correspondant à ce chapitre : l'importance de mesurer les paramètres de polarisation C_{nn}, D_{nn} et K_{nn}.

2ème Partie (problème 7)

Au chapitre 12, nous étudions les équations intégrales de Stieltjes, dont les solutions seront utilisées au chapitre suivant pour construire les amplitudes de diffusion non-relativistes à partir des données expérimentales, mesurées avec une précision infinie.

Au chapitre 13, on considère la construction de l'amplitude non-relativiste $f(s,t)$ dans les cas suivants : a) lorsqu'on se situe sur le plan complexe s à t fixe dans $0 \geq t > -\infty$, à partir des données sur toute la région physique, l'unitarité et la représentation de module, b) dans les plans complexes s et t à partir des données sur un domaine $s_b \geq s \geq s_a$, $0 \geq t > -8\,m\,s$ de la région physique, l'unitarité et la représentation de Mandelstam, c) à partir de la section efficace différentielle asymptotique, $\frac{d\sigma(\infty,t)}{d\Omega}$. On remarque l'existence de quelques restrictions sur les données expérimentales pour que les différentes méthodes de construction ne deviennent pas contradictoires.

CHAPITRE II

REPRESENTATIONS ANALYTIQUES

2 - A - REPRESENTATION DE MODULE POUR UN DEMI-PLAN

Nous allons faire les hypothèses suivantes sur la fonction f(Z) :

a) Elle est analytique et régulière dans le demi-plan supérieur Im Z > 0.

b) Si les Z_n, n = 1... N, sont les zéros de f(Z) dans Im Z > 0, un zéro d'ordre m ($f(Z) \sim (Z - Z_n)^m$) étant considéré comme m zéros qui coïncident et, en supposant qu'il n'y a pas de zéros à ordre infini, alors l'expression :

$$f_B(z) = \prod_{n=1}^{N} \frac{z - z_n}{z - z_n^*} \qquad (2.A.1)$$

est convergente et bien définie dans Im Z > 0 (cette hypothèse est certaine, soit si N est fini, soit si les zéros satisfont la condition de convergence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_n}{1 + |z_n|^2} < +\infty$ si N est infini).

c) Il existe un nombre réel γ tel que

$$h(z) = \ln\left[\frac{f(z)}{f_B(z)\, \exp(i2p\pi)}\right] \qquad (2.A.2)$$

satisfait la condition suivante : $\lim_{z \to \infty} \left| \frac{h(z)}{z^\gamma} \right| = 0$

dans Im Z ≥ 0, 2 p π étant le facteur de phase constant qui est arbitraire de forme inhérente dans f (Z) (p étant entier).

d) f(Z) a un nombre fini de zéros et pôles à ordre fini dans l'axe réel, de telle façon qu'il n'y a aucune singularité de f(Z) dans Im Z = 0 qui puisse nous empêcher d'appliquer le théorème de Cauchy.

Nous allons alors l'appliquer à la fonction $\frac{h(Z)}{A(Z)}$ pour le chemin d'intégration qui est dessiné dans la figure 1, A(Z) étant le polynôme

$$A(z) = \prod_{h=1}^{H} (z - C_h) \qquad (2.A.3)$$

(C_h étant réel et différent de tous les zéros possibles et pôles de f(Z), et H étant fini et ≥ γ). D'après quelques calculs, on parvient à écrire finalement la représentation de module suivante pour f(Z) dans Im Z > 0 :

$$f(z) = f_B(z) \cdot \exp\left\{ i2p\pi + \sum_{j=1}^{H} A_j(z) \operatorname{Im} h(c_j) + \right.$$

$$+\frac{1}{i\pi}A(z)P_c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'\ln|f(x')|}{A(x')(x'-z)}\Bigg\} \qquad (2.A.4)$$

$$A_j(z)=\prod_{h=1,\,h\neq j}^{H}\frac{z-c_h}{c_j-c_h}\quad,\quad \mathrm{Im}\,h(c_j)=\arg f(c_j)-\arg f_B(c_j)-2p\pi \qquad (2.A.5)$$

le symbole P_c indique que l'intégrale doit être calculée comme une valeur principale de Cauchy à chaque point $X' = C_h$. Il faut remarquer que l'intégrale sur la variable X' dans l'équation (2.A.4) est convergente lorsqu'on "passe" à travers chaque pôle ou zéro réel de f(X'), grâce à l'hypothèse d), puisque la singularité correspondante est logarithmique, donc intégrable.

Si Im Z = $\epsilon \to 0^+$ et si on tient compte de la relation

$$\frac{1}{x'-(x+i\epsilon)}=P\frac{1}{x'-x}+i\pi\delta(x'-x)$$

on voit alors clairement que l'équation (2.A.4) devient (Re Z = X)

$$f(x)=|f(x)|\exp\left[i\arg f(x+i\epsilon)\right] \qquad (2.A.6)$$

$$\arg f(x+i\epsilon)=2p\pi+2\sum_{n=1}^{N}\mathrm{arctg}\left[\frac{\mathrm{Im}\,z_n}{\mathrm{Re}\,z_n-x}\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{H}A_j(x)\,\mathrm{Im}\,h(c_j)-\frac{1}{\pi}A(x)P_{c,x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'\ln|f(x')|}{A(x')(x'-x)} \qquad (2.A.7)$$

Maintenant, le symbole $P_{C,X}$ indique que l'intégrale est une valeur principale pour X' = X et pour chaque C' = C_h. Il faut souligner que les Im h (C_j) sont des constantes de soustraction dans la relation de dispersion pour h (Z) à partir de laquelle on obtient l'équation (2.A.4). Dans les applications physiques qui seront présentées plus tard dans ce travail, nous utiliserons directement soit l'équation (2.A.4), soit l'équation (2.A.7) sans aucune nouvelle discussion, étant donné qu'est connu le processus pour passer de l'une à l'autre.

Quelques représentations de module plus simples que celles que nous avons présenté, ont été utilisées dans (6), (7), (8), (9), (10).

2 - B - REPRESENTATION DE MODULE POUR UNE FONCTION AVEC DEUX COUPURES

Soit une fonction f(Z) telle que :

a) Elle est analytique et régulière dans le plan complexe Z, avec l'exception de deux coupures réelles de $-\infty$ jusqu'à X_1, et de X_2 jusqu'à $+\infty$ ($X_2 > X_1$), et ayant un nombre fini de pôles réels à ordre fini dans les coupures et entre X_1 et X_2 (ces derniers pôles étant représentés par ρ_s, s = 1... S, $X_1 < \rho_s < X_2$).

b) Elle satisfait $f(Z) = f(Z^*)^*$, étant réelle dans l'intervalle réel $X_1 < X < X_2$.

c) Elle a un nombre fini de zéros réels à ordre fini dans les coupures et dans l'intervalle $X_1 < X < X_2$ (ces dernières étant représentées par μ_r, r = 1... R, $X_1 < \mu_r < X_2$), et elle a, par ailleurs, un nombre fini de paires de zéros Z_n, Z_n^*, n = 1... N, Im $Z_n > 0$.

d) La fonction :

$$g(z) = \ln\left[\frac{f(z)\prod_{s=1}^{S}(z-\rho_s)}{\exp(i2p\pi)\prod_{r=1}^{R}(z-\mu_r)\prod_{n=1}^{N}(z-z_n)(z-z_n^*)}\right] \qquad (2.B.1)$$

satisfait : $\lim_{z\to\infty}\left|\frac{g(z)}{z}\right| = 0$

e) Il n'y a aucune singularité de f(Z) sur l'axe réel qui puisse nous empêcher de faire l'application suivante du théorème de Cauchy :

Nous définissons d'abord les deux coupures de $\sqrt{(Z-X_1)(Z-X_2)}$ comme il est montré dans la figure 2. Ensuite, en appliquant le théorème de Cauchy à $\frac{g(Z)}{\sqrt{(Z-X_1)(Z-X_2)}}$ dans le chemin dessiné sur la figure 2 et en faisant des calculs assez longs, on arrive à obtenir la représentation du module suivant, pour f(Z) (Z ne coïncidant avec aucune singularité)

$$f(z) = D(z)\exp\left\{i2p\pi + \frac{\sqrt{(z-X_1)(z-X_2)}}{i\pi}\cdot\right. \qquad (2.B.2)$$

$$\left.\left[\int_{X_2}^{+\infty}\frac{dx'\ln|f(x')|}{\sqrt{(x'-X_1)(x'-X_2)}(x'-z)} - \int_{-\infty}^{X_1}\frac{dx'\ln|f(x')|}{\sqrt{(X_1-x')(X_2-x')}(x'-z)}\right]\right\}$$

$$D(Z) = \prod_{s=1}^{S} \frac{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{\rho_s - X_2} + \sqrt{Z-X_2}\sqrt{\rho_s - X_1}}{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{\rho_s - X_2} - \sqrt{Z-X_2}\sqrt{\rho_s - X_1}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{r=1}^{R} \frac{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{\mu_r - X_2} - \sqrt{Z-X_2}\sqrt{\mu_r - X_1}}{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{\mu_r - X_2} + \sqrt{Z-X_2}\sqrt{\mu_r - X_1}} \cdot$$

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{Z_n - X_2} - \sqrt{Z-X_2}\sqrt{Z_n - X_1}}{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{Z_n - X_2} + \sqrt{Z-X_2}\sqrt{Z_n - X_1}} \cdot \frac{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{Z_n^* - X_2} - \sqrt{Z-X_2}\sqrt{Z_n^* - X_1}}{\sqrt{Z-X_1}\sqrt{Z_n^* - X_2} + \sqrt{Z-X_2}\sqrt{Z_n^* - X_1}}$$

Nous allons faire quelques remarques : i) Même si f(Z) a des pôles et des zéros réels pour $X > X_2$ et $X < X_1$, les intégrales dans l'équation (2.B.2) sont bien définies et convergentes, grâce aux hypothèses a), c), e), puisque les singularités induites par elles sont logarithmiques et, donc, intégrables ; ii) Il est possible d'en déduire sans aucune difficulté (mais avec beaucoup de calculs), la représentation de module pour les fonctions f(Z) telles que $\lim_{Z\to 0} \left| \frac{g(Z)}{Z^\gamma} \right| = 0$ pour $\gamma > 1$, en considérant $\frac{g(Z)}{A(Z)}$, A(Z) étant un pôlynome du type considéré dans la section 2.A ; iii) De même, il est possible de généraliser l'hypothèse qui suppose que N (le nombre des zéros Z_n) est fini, en la substituant par une autre dans laquelle N peut devenir infini (mais en supposant que les Z_n satisfont à quelques conditions de convergence). Heureusement, en ce qui concerne le but de ce travail les généralisations ii) et iii) ne sont plus nécessaires.

Quand Re Z = $X > X_2$ et Im Z = $\epsilon \to 0^+$, il est possible d'obtenir très facilement la même équation (2.A.6), mais maintenant avec :

$$\arg f(X+i\epsilon) = \arg D(X+i\epsilon) + 2p\pi - \frac{\sqrt{(X-X_1)(X-X_2)}}{\pi} \cdot$$

$$\cdot \left[P_x \int_{X_2}^{+\infty} \frac{dx' \ln|f(x')|}{\sqrt{(x'-X_1)(x'-X_2)}\,(x'-X)} - \int_{-\infty}^{X_1} \frac{dx' \ln|f(x')|}{\sqrt{(X_1-x')(X_2-x')}\,(X'-X)} \right] \qquad (2.B.4)$$

Il faut souligner que les conventions pour définir les coupures de $\sqrt{Z_n - X_2}$ et $\sqrt{Z_n - X_1}$ ne sont pas les mêmes, ceci nous permet d'avoir D(X) = 1.

Une représentation parallèle à l'équation (2. B. 4) fut proposée dans (11). Si $\lim f(X_2 - \epsilon)$ et $\lim f(X_1 + \epsilon)$ existent lorsque $\epsilon \to 0^+$ et ne sont pas nulles, en étudiant la variation de arg f(X) pour l'intervalle $X_1 < X < X_2$, on arrive très facilement à obtenir

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \arg f(x_2 - \epsilon) - \lim_{\epsilon \to 0^+} \arg f(x_1 + \epsilon) = \pi (S - R) \qquad (2.B.5)$$

2 - C - REPRESENTATIONS DE PHASE

Nous allons supposer que la fonction f(Z) satisfait les conditions a) b), c), d) de la section 2. A. Alors, en utilisant le théorème de Cauchy comme précédemment et en faisant quelques opérations dirigées à exprimer les intégrales dispersives en termes de arg f(X') (et non plus en termes de $\ln|f(X')|$ comme nous le faisions auparavant), on parvient à obtenir la représentation de phase générale pour f(Z) dans Im Z > 0 :

$$f(z) = B(z) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{H} A_j(z) \ln \left| \frac{f(c_j)}{B(c_j)} \right| + \frac{A(z)}{\pi} P_c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' \arg f(x')}{A(x')(x'-z)} \right\} \qquad (2.C.1)$$

$$B(z) = \exp(i 2\pi p) \prod_{n=1}^{N} (z - z_n)(z - z_n^*) \qquad (2.C.2)$$

A(Z) et $A_j(Z)$ étant donné dans les équations (2. A. 3) et (2. A. 5) respectivement. Si Re Z = X et Im $Z = \epsilon \to 0^+$, l'équation (2. C. 1) devient l'équation (2. A. 6), mais ici :

$$|f(x)| = |B(x)| \exp\left\{ \sum_{j=1}^{H} A_j(x) \ln \left| \frac{f(c_j)}{B(c_j)} \right| + \frac{A(x)}{\pi} P_{c,x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' \arg f(x')}{A(x')(x'-x)} \right\} \qquad (2.C.3)$$

Il faut remarquer que, même si arg f(X) est défini à une phase (2p π) près, le module |f(X)| est donné de forme unique au moyen de l'équation (2. C. 3), étant donné que $P_{c,x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{A(x')(x'-x)} = 0$. Si f(Z) a un zéro ou pôle réel pour $X = \alpha$, alors nous allons avoir nécessairement :

$$\exp\left\{ \frac{1}{\pi} A(x) P_{c,x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' \arg f(x')}{A(x')(x'-x)} \right\}_{x=\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad +\infty$$

même si arg f(X) n'est pas singulier pour $X = \alpha$.

Maintenant, nous supposerons que f(Z) satisfait les conditions exprimées dans la section (2. B.). Nous supposerons aussi que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(X_2 - \epsilon)$ existe et n s'annule pas. Alors, les représentations de phase données dans les équations (2. C. 1), (2. C. 3) sont aussi valables pour cette nouvelle fonction f(Z), à quelques petites modifications près : i) le produit B(Z) va être remplacé par

$$B(z) \cdot \frac{\prod_{r=1}^{R} (z - \mu_r)}{\prod_{s=1}^{S} (z - \rho_s)}$$

ii) arg f(X') est remplacé par arg f(X') - arg $f(X_2)$; iii) l'intégrale comporte maintenant deux parties, une pour l'intervalle $-\infty < X' < X_1$, et l'autre pour $X_2 < X' < +\infty$. Grâce à la condition b) de la section 2. B, il suffit de faire le degré du pôlynome A(Z) égal à 1 dans ce cas.

La représentation de phase avait été étudiée aussi dans (13 - 19).

CHAPITRE III

DIFFUSION NON-RELATIVISTE PAR UN POTENTIEL

Nous allons considérer une particule non-relativiste sans spin, de masse $m \neq 0$, qui est diffusée élastiquement par un potentiel réel central $V(r)$. Les valeurs physiques de l'énergie s et du transfert d'impulsion t, pour lesquelles il y a diffusion "physique" sont respectivement : $s \geq 0$, $0 \geq t \geq -8ms$ ($t = -8ms$ correspondant à une diffusion vers l'arrière). Soit K l'impulsion de la particule, alors : $K = (2ms)^{1/2}$, la coupure de $(2ms)^{1/2}$ étant définie dans la figure 3. Si $f(s,t)$, $\frac{d\sigma(s,t)}{d\Omega}$ et $\sigma_{tot}(s)$ sont respectivement l'amplitude de diffusion, la section efficace différentielle et la section efficace totale, il se trouve que :

$$\frac{d\sigma(s,t)}{d\Omega} = \frac{1}{m^2}\left|f(s,t)\right|^2 \tag{3.1}$$

$$\mathrm{Im}\, f(s,0) = \frac{m}{4\pi}\sqrt{2ms}\,\sigma_{tot}(s) \tag{3.2}$$

Il faut souligner que $f(s,t)$ est sans dimension grâce au facteur m.

Nous allons supposer que le potentiel $V(r)$ est tel que :
a) $\int_0^{+\infty} dr\, r\, V(r)\, e^{\alpha r} < +\infty$, pour $0 \leq \alpha < \mu$. Ceci implique que : 1) Le nombre total B des états liés est fini, grâce à l'inégalité de Bargmann [20]. 2) Pour t réel et fixe dans $|t| < 4\mu^2$, la fonction $f(s,t)$ est analytique et régulière dans le plan complexe s, à l'exception d'une coupure $0 \leq s < +\infty$, (l'amplitude physique étant la limite de cette fonction analytique au bord supérieur de la coupure), et d'un nombre fini de pôles réels correspondant aux états liés, dans $s = s_i$, $i = 1 \ldots B$, $s_i > 0$ (la possibilité $s_i = 0$ n'étant pas possible par hypothèse). Par ailleurs, il se trouve que

$$f(s^*,t)^* = f(s,t) \tag{3.3}$$

et si $s \to \infty$ selon une direction réelle ou complexe quelconque

$$f(s,t) \to f_{BORN}(t) = -\frac{m^2}{2\pi}\int d^3\bar{r}\, \exp(i\bar{\Delta}\bar{r})\, V(r) =$$

$$= -\frac{2m^2}{\sqrt{-t}}\int_0^{+\infty} r \sin\left(\sqrt{-t}\, r\right) V(r)\, dr \tag{3.4}$$

$$t = -\bar{\Delta}^2 \quad , \quad r = |\bar{r}|$$

(voir, par exemple, [21]).

En plus, nous supposerons que b) $f_{Born}(t) \neq 0$ pour $0 \geq t > t_0$, $|t_0| \leq 4\mu^2$ c) $f(s=0,t) \neq 0, \pm \infty$ pour $0 \geq t > t_0$. Ces nouvelles hypothèses ont la conséquence suivante :

3) pour t fixe dans l'intervalle $0 \geq t > t_0$, N(t), le nombre de zéros de f(s,t) dans le plan complexe s, dehors de la coupure, est fini. Ce résultat peut être démontré en appliquant le théorème bien connu sur le nombre de zéros et pôles d'une fonction analytique à f(s,t), comme suivi.

Nous considérons l'expression : $\frac{1}{f,st)} \cdot \frac{d\, f(s,t)}{d\, s}$ et nous calculons l'intégrale de cette fonction dans le plan coupé s selon le chemin exposé dans la figure 3 (quelques opérations similaires en relation avec la démonstration du théorème de Levinson pour une onde partielle quelconque peuvent être observés par exemple, dans (22)). Ainsi, on obtient :

$$\lim_{s \to \infty + i\epsilon} \arg f(s,t) - \lim_{s \to 0} \arg f(s,t) = \pi \left[B - N(t) \right] \qquad (3.5)$$

L'hypothèse b), la réalité de V(r) et de $-t \geq 0$ impliquent que $\lim_{s \to +\infty + i\epsilon} \arg f(s,t)$ existe et doit être égale à π. $n_\infty(t)$, $n_\infty(t)$ étant un entier. En utilisant la conséquence 2) ci-dessus et l'hypothèse c), on voit que $\lim_{s \to 0} \arg f(s,t) = \pi n_0(t)$, $n_0(t)$ étant aussi un entier. Finalement, en utilisant la conséquence 1), on trouve que N(t) doit être fini.

Soit N'(t) le nombre de zéros de f(s,t) dans la coupure. Pour t = 0, l'hypothèse additionnelle (très raisonnable) supposant que $\sigma_{tot}(s)$ s'annule au plus pour un nombre fini de valeurs de s ainsi que le théorème optique (éq. 3.2), implique que N'(0) doit être fini. Ce fait et l'hypothèse qui suppose que f(s,t) est une fonction continue du t pour des valeurs petites et négatives de t, pour chaque $s \geq 0$ fixé, impliquent que N'(t) doit être aussi fini pour ces valeurs de t. Il est possible de donner aussi un autre argument ; en considérant qu'il n'y a pas de pôles dans la coupure, que $\frac{1}{\pi} \arg f(s,t)$ a une diminution de valeur p($p \geq 1$) à chaque zéro d'ordre p, dans la coupure, lorsque s augmente, et en supposant que les seules discontinuités de arg f(s,t) sont ces zéros pour $0 \geq t > t_0$, tout en se rappelant que $n_0(t)$ et $n_\infty(t)$ sont finis pour $0 \geq t > t_0$, il est facile alors à comprendre que N'(t) doit être finie pour ces valeurs de t.

Si nous supposons, en plus, que $f(s,t)$ a des propriétés d'analyticité pour la variable t, et qu'elle ne s'annule pas pour toutes les valeurs de t à une valeur fixée de $s(>0)$ (cette hypothèse étant valable quand on a des potentiels $V(r)$ raisonnables à courte portée), alors on peut obtenir des résultats plus importants en ce qui concerne le nombre des zéros (ceci d'après le Professeur A. Martin). Si $V(r) < 0$, alors l'équation (3.4) nous indique qu'on peut choisir $\arg f(s = +\infty, 0) = 0$ et, que d'ailleurs nous pouvons démontrer que $N'(0) = 0$. (En fait, si $f(s',0) = 0$ pour quelque $s' > 0$, d'après le théorème optique : $\sigma_{tot}(s') = 0$, et donc, $|f(s',t)| = 0$ pour $0 \geq t \geq -8\, m\, s'$. Alors, compte tenu des propriétés d'analyticité dans la variable t, il serait possible d'obtenir $f(s',t) = 0$ pour toutes les valeurs de t, ceci étant une contradiction avec la deuxième propriété que nous avons supposé sur l'amplitude). Toute autre discontinuité "mauvaise" de $\arg f(s,0)$ n'étant pas possible, si notre potentiel $V(r)$ est suffisamment raisonnable, on voit alors que $\arg f(s = 0, 0)$ doit être égal à 0 (si la longueur de diffusion $f(0,0)$ est positive) ou π (si $f(0,0)$ est négative). Alors $N(0) = B$ ou $B + 1$ respectivement. Si $V(r) > 0$, il est possible de choisir $\arg f(s = +\infty\, 0) = \pi$. Une discussion pareille démontre que $N'(0) = 0$ et $N(0) = B$ (si $f(0\ 0) < 0$) ou $= B - 1$ (si $f(0,0) > 0$). Les propriétés d'analyticité pour la variable t indiquent que pour des raisons de continuité les mêmes résultats sont valables pour des faibles valeurs négatives de t.

La représentation de module pour $f(s,t)$ dans le plan complexe s pour t fixe dans l'intervale $0 \geq t > t_0$ peut être obtenue en considérant le demi plan supérieur du plan complexe K (et non plus le plan s pour le moment). Alors, il se trouve que :

$$h(K,t) = f(\quad\quad\quad

Nous allons trouver maintenant l'expression de f(s, t) en choisissant $C_1 = 0$ et, en faisant les considérations suivantes :

i) les phases sont prises en compte,

ii) $|h(\pm K, t)| = |f(s, t)|$ pour K réel,

iii) les équations employées sont les (3. 1) et (3. 6)

iv) les formules finales sont exprimées en termes de K;

Alors, pour l'intervalle $0 \geq t > t_0$ et lorsque s ne coïncide avec aucune singularité, l'expression de f(s, t) cherchée est obtenue et elle a la forme suivante :

$$f(s,t) = \prod_{i=1}^{B} \frac{i\sqrt{s_i} + s}{i\sqrt{s_i} - s} \cdot \prod_{m=1}^{N(t)} \frac{\sqrt{s} - (K_m(t)/\sqrt{2m})}{\sqrt{s} - (K_m(t)^*/\sqrt{2m})}$$

$$\cdot \exp\left\{ i\pi n_0(t) + \frac{\sqrt{s}}{i\pi} \int_0^{-t/3m} \frac{ds' \ln|m f(s',t)|}{\sqrt{s'}\,(s'-s)} + \frac{\sqrt{s}}{2i\pi} \int_{-t/3m}^{+\infty} \frac{ds' \ln\left|m^2 \frac{d\sigma(s',t)}{d\Omega}\right|}{\sqrt{s'}\,(s'-s)} \right\} \quad (3.7)$$

$K_n(t)$ étant les zéros dans le demi plan supérieur Im K > 0 (pour chaque zéro $K_n(t)$, il y a un autre - $K_n(t)^*$).

Si les pôles correspondant aux états liés sont connus, ainsi que les zéros, la contribution de la région non -physique ($0 \geq s > - t/8m$) et un nombre suffisant de données expérimentales pour $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, alors, l'équation (3. 7) peut être utilisée pour calculer f(s, t). Quelques méthodes différentes pour trouver les pôles, les zéros, la contribution de la région non-physique et, même, quelques restrictions sur $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, seront étudiées plus tard dans ce travail au cas de la diffusion π N.

La représentation de phase pour f(s, t) dans le plan complexe s, pour t = 0, peut être obtenue de la même manière à partir des hypothèses et résultats antérieurs et de la considération de la section 2. C. En prenant $A(Z) = Z$ comme auparavant, nous sommes sûrs que notre représentation aura une convergence. Alors, nous arrivons finalement (pour s ne coïncidant avec aucune singularité) à trouver l'expression suivante :

$$f(s,0) = |f(s,0)| \cdot \frac{\prod_{m=1}^{N(t)} \left[1 - 2ms/K_n(0)^2\right]}{\prod_{i=1}^{B} (1 + s/s_i)} \cdot \exp\left\{ i n_0(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{s}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{ds' \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha(s')} - \pi n_0(0) \right]}{s'(s'-s)} \right\} \quad , \quad |f(0,0)| = m \sqrt{\frac{d\sigma(0,\cdot)}{d\Omega}} \, , \tag{3.8}$$

$$\alpha(s') = \frac{\operatorname{Re} f(s',0)}{\operatorname{Im} f(s',0)} = \left[\frac{16\pi^2 \frac{d\sigma(s',0)}{d\Omega}}{2ms' \sigma_{tot}(s')^2} - 1 \right]^{1/2}$$

Si notre particule non-relativiste est chargée, alors $\alpha(s')$ peut être obtenue directement à partir de l'interférence coulombienne. Il est possible auss d'écrire la représentation de phase pour t fixe dans l'intervalle $0 > t > t_0$, mais elle devient moins intéressante, car arg f(s't) ne peut pas être obtenue à partir de l'expérience pour $0 > t > t_0$. Ceci serait possible si des expériences sur l'effet de Hanbury-Brown et Twiss étaient disponibles, mais ces dernières sont très difficiles à réaliser.

D'après (23), si la particule incidence est représentée par une superposition d'ondes dont le centre arrive au détecteur à l'instant q, alors la particule diffusée vers l'avant (t = 0) est représentée aussi par une autre superposition d'ondes dont le centre arrive au détecteur au temps q + Q. Ici

$$Q = \frac{1}{ds} \left[\arg f(s,0) \right] = \frac{d}{ds} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha(s')} \right] \tag{3.9}$$

Q représente le retard temporel de la diffusion vers l'avant, dû à l'action du potentiel V(r). Ce retard pour toute l'amplitude vers l'avant ne doit pas être confondu, tout au moins en principe, avec une autre quantité qui a aussi la signification d'un retard mais qui est considérée seulement pour chaque onde partiell (24).

Près de l'énergie correspondante à une résonance "aigüe" (c'est-à-di une largeur de vie très courte par rapport à sa masse) et si le "bruit de fond" n'est pas grand et varie lentement, il se trouve que arg f(s, 0) doit varier de man re qualitativement analogue à celle du déphasage dans lequel on trouve la résonan ce. Donc, Q doit avoir un maximum pour une valeur de s voisine à la masse de la résonance. Il faut remarquer, d'autre part, que si Q a un maximum à une cer taine énergie, l'existence d'une résonance aigüe dans quelqu'une des ondes

partielles, ne peut pas alors être déduite nécessairement. En fait, en faisant appel à l'équation (3.7), il est possible de voir que la contribution d'une paire de zéros $K_n(0)$, $-K_n(0)^*$ au retard Q est :

$$\sqrt{\frac{2m}{s}}\,\mathrm{Im}\,K_n(0)\left\{\frac{1}{\left[\sqrt{2ms}-\mathrm{Re}\,K_n(0)\right]^2+\left(\mathrm{Im}\,K_n(0)\right)^2}+\frac{1}{\left[\sqrt{2ms}-\mathrm{Re}\,K_n(0)\right]^2+\left(\mathrm{Im}\,K_n(0)\right)^2}\right\}$$

cette expression a deux maximum quand $\sqrt{2ms} = \pm\,\mathrm{Re}\,K_n(0)$. Elle peut donner une contribution dominante et même un maximum à Q, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

i) $\left|\mathrm{Im}\,K_n(0)\right| \ll \left|\mathrm{Re}\,K_n(0)\right|$

ii) la contribution de l'intégrale sur $f(s,0)$ est une fonction lentement variable.

Nous croyons que cette discussion peut donner quelques idées sur les aspects physiques des zéros complexes d'une amplitude. Il faut souligner que nous n'avons pas trouvé d'autres propriétés qui soient communes aux zéros et aux résonances au même temps.

Quand l'énergie s devient grande, la particule (étant toujours non-relativiste) passe très rapidement à travers la région où elle peut être influencée par le potentiel V(r) de telle manière que ce dernier n'a pas beaucoup de temps pour agir sur elle. Alors, on peut espérer, tout au moint à partir d'un point de vue intuitif, que Q (qu'il soit positif ou négatif) sera petit.

Ces remarques ont la conséquence qualitative que, pour s assez grand, il ne faut pas s'attendre à trouver ni des résonances aigües ni des zéros complexes voisins de la région physique (car, autrement, Q pourrait devenir grand).

Tous ces commentaires qualitatifs gardent leur validité quand le transfert n'est plus strictement nul, mais qu'il a des valeurs faibles négatives. Lorsque -t devient plus grand, le problème est alors beaucoup plus compliqué (car le recul de la particule doit être considéré, ainsi que des contributions "géométriques" produites par la courbure de la "trajectoire classique" de la particule, etc... (23)) et, il ne sera pas traité ici.

CHAPITRE IV

LA DIFFUSION πN

4 - A - LES AMPLITUDES DE TRANSVERSITE POUR $\pi^{\pm} p \to \pi^{\pm} p$ ET POUR $\bar{p}p \to \pi^{+}\pi^{-}$.

Les voies s, u, t sont $\pi^- p \to \pi^- p$, $\pi^+ p \to \pi^+ p$ et $p\bar{p} \to \pi^+\pi^-$ respectivement. Soient p_1 et q_1 (p_2 et q_2) les impulsions à 4 dimensions du proton et du méson π^- entrants (sortants) dans la voie s, et τ_1 (τ_2) la projection du spin du proton entrant (sortant). Les symboles M et μ représenteront les masses du nucléon et du méson. Alors, les invariantes cinématiques et l'amplitude de diffusion dans la voie s sont

$$s = -(p_1+q_1)^2 \geq (M+\mu)^2 , \quad t = -(q_1-q_2)^2 \leq 0 , \quad u = -(p_1-q_2)^2 \leq 0 \qquad (4.A.1)$$

$$s+t+u = 2(M^2+\mu^2), \quad \nu = \frac{s-u}{4M} , \quad s = M^2+\mu^2+2M\nu - t/2 \qquad (4.A.2)$$

$$p_j = (\bar{p}_j, iE_j) , \quad q_j = (\bar{q}_j, i\omega_j) , \quad j = 1,2 \qquad (4.A.3)$$

$$T_-(\tau_2,\tau_1) = \mu . \bar{u}(p_2,\tau_2)\left[A_- - \frac{i}{2}\gamma_\lambda (q_1+q_2)_\lambda B_- \right] u(p_1,\tau_1) \qquad (4.A.4)$$

les u's et γ's étant des spineurs et des matrices de Dirac habituelles(25) (26). L'amplitude $T_-(\tau_2, \tau_1)$ est sans dimension, grâce au facteur μ. Les amplitudes invariantes A_-, B_- peuvent être exprimées en termes d'amplitudes invariantes "standard" $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$ au moyen des équations : $A_- = A^{(+)} + A^{(-)}$, $B_- = B^{(+)} + B^{(-)}$. Le repère qui nous intéresse ici est celui du laboratoire, c'est-à-dire le repère dans lequel le proton entrant est au repos ($\bar{p}_1 = \bar{0}$). En fait, faisant le croisement de l'autre nucléon et les deux mésons de manière convenable, toutes les configurations possibles cinématiques dans les voies t et u peuvent être obtenues dans le même repère. Ainsi, il ne sera pas nécessaire de considérer des transformations de Lorentz complexes entre la voie s et les voies t et u. Il faut souligner que cette propriété commode du système de laboratoire n'est plus valable pour le système baricentrique. Alors il est facile de démontrer que l'énergie et l'impulsion du méson π entrant, dans le laboratoire, sont $\nu - t/4M$ et $q_L = [(\nu - t/4M)^2 - \mu^2]^{1/2}$ respectivement.

En plus, nous choisirons τ_1 et τ_2 de manière qu'elles soient les projections des spins des nucléons selon la normale $\bar{n} = \frac{\bar{q}_1 \wedge \bar{q}_2}{|\bar{q}_1 \wedge \bar{q}_2|}$, au plan de la diffusion dans le repère du laboratoire. Ceci entraînera les conséquences suivantes :

i) Les relations de croisement pour les amplitudes de diffusion deviendront très simplifiées, (voir les équations (4.A.10) et (4.A.16) ci-dessous),

ii) Les quantités observables (section efficace différentielle non-polarisée et polarisation) s'exprimeront très facilement en termes des modules carrés des amplitudes de diffusion. Ces dernières et τ_1, τ_2 seront appelées amplitudes de transversité et transversités respectivement, d'après Kotanski (27) qui avait étudié les amplitudes de transversité dans le repère baricentrique. En exprimant les spineurs de Dirac $u(p_1, \tau_1)$, $\bar{u}(p_2, \tau_2)$ en fonction des spineurs de Pauli $\chi(\tau_j)$ $j = 1, 2$, tels que $\frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{n} \chi(\tau_j) = \tau_j \chi(\tau_j)$ et en faisant quelques opérations dans le système du laboratoire, l'équation (4.A.4) devient :

$$T_-(\tau_2, \tau_1) = \mu \left(1 - t/4M^2\right)^{1/2} \left\{ A_- + \frac{\nu}{1 - t/4M^2} B_- - i 2\tau_1 \frac{C}{2M} \cdot \frac{1}{1 - t/4M^2} B_- \right\} \cdot \delta_{\tau_2, \tau_1} \tag{4.A.5}$$

$$C = |\bar{q}_1 \wedge \bar{q}_2| = \left[(-t)(\nu^2 - \nu_0^2)\right]^{1/2} \tag{4.A.6}$$

$$\nu_0 = \mu \left[\left(1 - t/4\mu^2\right)\left(1 - t/4M^2\right)\right]^{1/2} \tag{4.A.7}$$

Si $\frac{d\sigma}{dt}$ est la section efficace différentielle invariante et non-polarisée, si d'autre part P est la polarisation selon la normale $\bar{n}$ pour des protons initialement non-polarisés dans $\pi^- p \to \pi^- p$, et si on tient compte des relations $T_-(+1/2 - 1/2 = T_-(-1/2, +1/2) = 0$, il est possible d'obtenir pour $0 \geq t$ et $\nu \geq \nu_0$:

$$|T_-(\tau_2, \tau_1)|^2 = 16\pi\mu^2 q_L^2 \frac{d\sigma_-}{dt} \left[1 + 2\tau_1 \cdot P_-\right] \delta_{\tau_2, \tau_1} \tag{4.A.8}$$

Nous pouvons voir ici sans difficulté que P_- $(0 \geq |P_-| \leq 1)$, considéré dans le laboratoire, est aussi la polarisation dans le système baricentrique. Pour $t = 0$ (diffusion vers l'avant) $C = 0$ et donc $T_-(+1/2, +1/2) = T_-(-1/2, -1/2) = T_{--}$, alors $P_- = 0$. Si $\sigma_-(\nu)_{tot}$ est la section efficace totale pour $\pi^- p \to \pi^- p$, le théorème optique prend la forme

$$\mathrm{Im}\, T_-(\nu) = \mu q_L \sigma_-(\nu)_{tot} \qquad (4.A.9)$$

Les équations (4.A.5) et (4.A.8) restent valables pour des amplitudes de transversité correspondant aux repères baricentriques et de Breit, mais leurs relations de croisement, même si elles sont assez simples, nous auront fait à tenir compte des angles de croisement.

Pour t fixe dans l'intervalle $0 \geq t > -\infty$, $C = C(\nu, t)$ donnée par l'équation (4.A.6) est analytique dans le plan complexe ν, à l'exception de deux coupures ($\nu_0 \leq \nu < +\infty$ et $-\infty < \nu \leq -\nu_0$) choisies par convention comme nous le montrons dans la figure 2. Alors nous avons les propriétés suivantes : $C(\nu, t) = -C(\nu^*, t)^*$ et $C(\nu, t) = C(-\nu, t)$. A partir de ces propriétés pour $C(\nu, t)$, des équations (4.A.5), (4.A.6) et des propriétés d'analyticité de $A_-(\nu, t)$, $B_-(\nu, t)$ dans le plan complexe pour t fixe dans $0 \geq t > -\infty$ (25), (26), nous pouvons déduire sans difficulté les propriétés d'analyticité suivantes pour les amplitudes $T_-(\nu, t, \tau_2, \tau_1)$:

a) Elles sont fonctions analytiques réelles dans le plan complexe ν, à l'exception d'un pôle correspondant au nucléon dans $\nu = \nu_B = -\frac{\mu^2}{2M} + \frac{t}{4M}$ et des deux coupures $(-\infty < \nu \leq -(\mu + \frac{t}{4M})$ et $(\mu + t/4M) \leq \nu < +\infty)$ qui se superposent si $-4\mu M \geq t > -\infty$,

b) Pour $\mathrm{Re}\, \nu \geq \nu_0$ et $\mathrm{Im}\, \nu = \epsilon \to 0^+$, ces fonctions analytiques deviennent les amplitudes physiques pour $\pi^- p \to \pi^- p$,

c) Pour $\mathrm{Re}\, \nu \leq -\nu_0$ et $\mathrm{Im}\, \nu = -\epsilon \to -0^+$, ces fonctions analytiques deviennent les amplitudes physiques de transversité dans le repère de laboratoire pour la voie u, $\pi^+ p \to \pi^+ p$ (les quantités correspondant à ce processus étant représentées par un index +) de telle manière que

$$T_-(\mathrm{Re}\,\nu - i\epsilon, t, \tau_2, \tau_1) = T_+(-\mathrm{Re}\,\nu + i\epsilon, t, -\tau_2, -\tau_1) \qquad (4.A.10)$$
$$\tau_2 = \tau_1 \;,\; -\mathrm{Re}\,\nu \geq \nu_0$$

(les équations pour T_+ analogues aux équations (4.A.8) et (4.A.9) étant

$$|T_+(\tau_2, \tau_1)|^2 = 16\pi\mu^2 q_L^2 \frac{d\sigma_+}{dt}\left[1 + 2\tau_1 P_+\right]\delta_{\tau_2, \tau_1} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{Im}\, T_+ = \mu q_L \sigma_{+,tot}\Big).$$

Il faut remarquer que le vecteur normal de module unité selon lequel est faite la projection des spins dans la voie $u(\pi^+ p \to \pi^+ p)$ est opposé à celui correspondant à la voie $s(\pi^- p \to \pi^- p)$.

En tenant compte de la relation entre s et ν (voir les équations (4.A.2)) il est possible de comprendre que les propriétés d'analyticité de $T_-(\tau_2, \tau_1)$ dans le plan complexe s pour t fixe, sont identiques à celles du plan complexe ν.

L'amplitude pour la voie $t(\bar{p} p \to \pi^+ \pi^-)$ est (28) :

$$T_{(t)}(\tau'_2, \tau_1) = \mu \xi_{st} \bar{v}(p'_2, \tau'_2) \left[A_- - \frac{i}{2} \gamma_\lambda (-q'_1 + q_2)_\lambda B_- \right] u(p_1, \tau_1) \quad (4.A.11)$$

ξ_{st} étant le facteur de phase relatif au croisement de l'isospin (et étant égal à -1 si les conventions de Carruthers et Krisch (29) sont suivies).

Nous choisissons encore une autre fois le système dans lequel le proton est au repos, $\bar{p}_1 = \bar{0}$, ce qui représente aussi le repère du laboratoire pour la voie t. Ici τ_1 et τ'_2 sont aussi les projections du spin selon la normale $\bar{n}_{(t)} = \frac{\bar{q}'_1 \wedge \bar{q}_2}{|\bar{q}'_1 \wedge \bar{q}_2|} (= -\bar{n})$ au plan du processus. Nous exprimons les spineurs de Dirac en termes des spineurs de Pauli (en notant que le spineur de Pauli pour l'antiproton est $\chi(-\tau'_2)$ et non plus $\chi(\tau'_2)$ et qu'il porte un facteur de phase $g(\tau'_2)$ inhérent, qui dépend de la transversité). En faisant quelques opérations, nous obtenons à partir de l'équation (4.A.11) l'expression suivante :

$$T_{(t)}(\tau'_2, \tau_1) = \mu g(\tau'_2) \xi_{st} \left(t/4M^2 - 1 \right)^{1/2} \left\{ A_- + \frac{\nu}{1 - t/4M^2} B_- + \right.$$

$$\left. + i 2\tau_1 \frac{C_{(t)}}{2M} \cdot \frac{1}{1 - t/4M^2} B_- \right\} \delta_{-\tau'_2, \tau_1} \quad (4.A.12)$$

$$C_{(t)} = |\bar{q}'_1 \wedge \bar{q}_2| = \sqrt{t \left[\mu^2 - \frac{ut}{4M^2} - \left(\frac{u - M^2 - \mu^2}{2M} \right)^2 \right]} \quad (4.A.13)$$

Soient $\frac{d\sigma_{(t)}}{ds}$ et $P_{(t)}$ la section efficace différentielle invariante non-polarisée et la polarisation selon $\bar{n}_{(t)}$ respectivement. Alors :

$$|T_{(t)}(\tau'_2, \tau_1)|^2 = 8\pi \frac{\mu^2}{M^2} \lambda(t, M^2, M^2) \frac{d\sigma_{(t)}}{ds} \left[1 + 2\tau_1 P_{(t)} \right] \delta_{-\tau'_2, \tau_1} \quad (4.A.14)$$

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) \quad (4.A.15)$$

La singularité cinématique pour la valeur $t = 4M^2$ ne donne lieu à aucune difficulté dans la région physique de la voie t. En effet, il est possible de voir que le seul point physique "dangereux" pourrait être, en principe : $s = u = \mu^2 - M^2$, $t = 4M^2$ mais, en tenant compte du fait que :

i) $\lim \left(\frac{t}{4M^2} - 1\right)^{-1/2} C_{(t)} = 2M\,(M^2 - \mu^2)^{1/2}$,

ii) $\lim\,(t/4M^2 - 1)^{-1/2}\,\nu = 0$,

iii) les amplitudes A_- et B_- ne sont pas singulières, quand $t \to 4M^2$ (s et u restant fixés dans la valeur $\mu^2 - M^2$) nous arrivons à comprendre que les amplitudes de transversité restent finies à ce point :

$$T_{(t)}(\tau'_2, \tau_1) = -\mu\, g(\tau'_2)\, 2\tau_1\, \xi_{st}\, i\,(M^2-\mu^2)^{1/2}\, B_-\, \delta_{-\tau'_2,\tau_1}$$

Pour u fixe dans l'intervalle $0 \geq u > -\infty$, la fonction $C_{(t)} = C_{(t)}(t,u)$ (voir l'équation (4.A.13) est analytique dans le plan t coupé selon l'axe réel comme il est montré dans la figure 2. La coupure de $\left(\frac{t}{4M^2} - 1\right)^{1/2}$ est choisie entre $t = 4M^2$ et $t = +\infty$, la fonction étant réelle et positive (négative) au bord supérieur (inférieur) de la coupure par convention.

On supposera que, pour u fixe dans l'intervalle $0 \geq u > -\infty$, les amplitudes $T_{(t)}(t, u, \tau'_2, \tau_1)$ ont les propriétés suivantes :

a) Elles sont analytiques dans le plan complexe t, à l'exception d'un pôle réel pour $t = 2\mu^2 + M^2 - u$ et quelques coupures réelles : $-\infty < t < (M-\mu)^2 - u$ et $4\mu^2 \leq t < +\infty$ (coupures dynamiques), $4M^2 \leq t < +\infty$, $-\infty < t \leq 0$ et $t_0 \leq t < +\infty$, (coupures cinématiques), t_0 étant égale à $\dfrac{-M^2 + \left(\frac{u - M^2 - \mu^2}{2M}\right)^2}{-\frac{u}{4M^2}}$

b) Elles sont réelles et analytiques si $\mathrm{Re}\left[\xi_{st}\, g(\tau'_2)\right] = 0$

c) Si $\mathrm{Re}\, t \geq t_0$; $\mathrm{Im}\, t = \epsilon \to 0^+$, ces fonctions analytiques sont les amplitudes de transversité physiques pour $\bar{p}p \to \pi^+\pi^-$

d) Pour $\mathrm{Re}\, t \leq 0$, $\mathrm{Im}\, t = -\epsilon \to -0^+$, ces fonctions analytiques deviennent les amplitudes de transversité physiques pour $\pi^- p \to \pi^- p$ de la forme suivante :

$$T_{(t)}(\mathrm{Re}\, t - i\epsilon, u, \tau'_2, \tau_1) = \exp\left[i\alpha(\tau'_2)\right] \cdot T_-(\mathrm{Re}\, \nu + i\epsilon, \mathrm{Re}\, t, \tau'_2, -\tau_1) \quad (4.A.16)$$

$$\tau'_2 = -\tau_1 \quad , \quad \exp\left[i\alpha(\tau'_2)\right] = i\,\xi_{st}\, g(\tau'_2)$$

$$Re\,\nu = \frac{M^2+\mu^2-U-\frac{1}{2}Re\,t}{2M} \geq \nu_0 \qquad (4.A.17)$$

(il faut souligner que la convention pour les phases, adoptée dans b), a comme conséquence : exp i $\alpha(\tau'_2) = \pm 1$; nous ne choisirons pas entre ces deux possibilités, car ce ne sera pas nécessaire).

Les propriétés d'analyticité pour $T_{(t)}(\tau'_2, \tau_1)$ énoncées ci-dessus, peuvent être aussi obtenues à partir des propriétés d'analyticité déjà habituelles pour A_-, B_- dans le plan t coupé pour u fixe (28).

Il est possible d'énoncer des propriétés d'analyticité pour $T_{(t)}(t, s, \tau'_2, \tau_1)$ dans le plan t pour s fixe de la même manière. Il est convenable de remarquer que nous n'avons pas utilisé des propriétés d'analyticité dans <u>deux</u> variables complexes.

La figure 4 montre les différentes régions physiques correspondant aux trois voies.

4 - B - <u>REPRESENTATIONS POUR LES AMPLITUDES DE TRANSVERSITE DANS LE LABORATOIRE</u>

Pour t fixe dans $0 \geq t > -\infty$, soient $\nu_n(t), \nu_n(t)^*$ ($Im\ \nu_n(t) > 0$), n = 1, ... N(t) les paires de zéros de $T_-(\nu, t)$ dans le plan complexe ν. En plus, pour $0 \geq t > -4\mu M$, $T_-(\nu, t)$ peut avoir R(t) zéros réels dans l'intervalle $-(\mu + t/4M) < \nu < +(\mu + t/4M)$. Les amplitudes et les zéros dépendent des transversités, bien entendu, mais nous n'écrirons pas explicitement cette dépendance dans l'exposition qui suit ; nous supposerons en plus que :

a) pour t fixe dans $0 \geq t > -\infty$, il y a quelques $\gamma(t)$ et $f(\nu, t)$ de telle forme que si ν tend vers l'infini, selon une direction réelle ou complexe quelconque, nous allons avoir :

$$\lim_{|\nu| \to \infty} \frac{T_-(\nu, t)}{\nu^{\gamma(t)} f(\nu, t)} = 1$$

$$\lim_{|\nu| \to \infty} \frac{f(\nu, t)}{\nu^{\epsilon}} = 0$$

pour tous les nombres ϵ positifs (par exemple, $f(\nu, t) = a(t)\,(\ell n \nu)^{b(t)}\,[\ell n(\ell n \nu)]^{C(t)} \ldots$. Il est très bien connu que l'hypothèse a) peut être démontrée à partir des axiomes de la théorie quantique du champ (30). Là, il est montré que $\gamma(t) \leq 1$.

b) Pour t fixe dans l'intervalle $0 \geq t > t_0$, Im $T_-(\nu, t)$ est une fonction non-oscil lante pour ν positif et négatif, d'après la définition proposée dans l'article (31

c) $\lim_{\nu \to \infty} \frac{\text{Im } T_-(\nu + i\epsilon, t)}{\text{Im } T_-(-\nu + i\epsilon, t)}$ existe (même si cette limite n'est pas finie) pour $0 \geq t > t_0$ (32).

Les hypothèses b) et c) sont satisfaites quand t = 0 (vers l'avant) grâce au théorème optique pour la diffusion $\pi^{\pm} p \to \pi^{\pm} p$, et, à l'hypothèse alternative (qui nous paraît d'ailleurs très raisonnable) que $\sigma_-(\nu)_{tot}$ et $\sigma_+(\nu)_{tot}$ n'oscillent pas et ne s'annulent pas pour un nombre infini de valeurs de ν. D'autre part cette dernière condition a pour conséquence que le nombre de zéros de $T(\nu)$ dans les deux coupures est fini. L'utilisation de la continuité ou de l'analyticité dans la variable t (ν étant fixe) nous permet de comprendre que les propriétés a), b) et la remarque faite ci-dessus, restent valables pour $0 > t > t_0$. Rien n'est connu sur la magnitude de $|t_0|$. Dans la suite (et pour simplifier le problème) nous supposerons que $T_-(\nu, t)$ n'a pas de zéros dans les coupures pour un t négatif quelconque. L'existence de ces zéros (disons dans les régions non-physiques par exemple) n'entraînerait que quelques petites modifications triviales dans le cas le plus compliqué.

Donc, il n'est pas difficile de démontrer, en utilisant les arguments présentés dans (32) (mais dans le sens opposé) que :

i) $\lim_{\nu \to +\infty} \arg T_-(\nu + i\epsilon, t)$ existe. Aussi, l'utilisation des arguments présentés dans (31) nous permet d'établir la relation suivante :

ii) $$\lim_{\nu \to +\infty} \left| \frac{T_-(\nu, t)}{T_-(-\nu, t)} \right| = 1$$

ce qui entraîne, en combinaison avec l'équation (4.A.8) et une autre égale pour $\pi^+ p \to \pi^+ p$, que :

iii) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\frac{d\sigma_-(\nu, t)}{dt}}{\frac{d\sigma_+(-\nu, t)}{dt}} = 1$$

iv) $$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1 + P_-(\nu, t)}{1 - P_-(\nu, t)} \cdot \frac{1 + P_+(-\nu, t)}{1 - P_+(-\nu, t)} = 1$$

Cette dernière équation donne lieu aux trois alternatives suivantes : 1) si $P_- \to 0$ pour $\nu \to -\infty$, alors $P_+ \to 0$ pour $\nu \to -\infty$ et réciproquement ; 2) si $P_- \to \pm 1$ pour $\nu \to +\infty$, alors $P_+ \to \mp 1$ pour $\nu \to -\infty$ et réciproquement ; 3) si $P_- \to a$, $a \neq 0, \pm 1$ pour $\nu \to +\infty$, alors $P_+ \to -a$ pour $\nu \to -\infty$ et réciproquement.

v) La validité du théorème de Pomeranchuk, pour t fixe dans $0 \geq t > \mu^2 - 2\mu M$, en utilisant le théorème habituel sur le nombre de zéros et pôles d'une fonction analytique, comme dans le cas de la particule non-relativiste, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[\lim_{\nu \to +\infty} \arg T_-(\nu + i\epsilon, t) - \arg T_-\left(\mu + t/4M, t\right)\right] - \left[\lim_{\nu \to +\infty} \arg T_-(-\nu + i\epsilon, t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \arg T_-\left(-\mu - t/4M, t\right)\right]\right\} = 2N(t) + R(t) - \gamma(t) - 1 \qquad (4.B.1)$$

Les deux limites ayamptotiques existent grâce à la propriété i) pour $0 \geq t > t_0$. Aussi, $\arg T_-[\pm(\mu + t/4M), t]$ est fini et bien défini pour quelque t fixe dans $0 \geq t > t'_0$ (car pour t = 0 il est très facile de voir, à partir des valeurs des longueurs de diffusion pour la diffusion πN (26) que $T_-(\pm\mu) \neq 0$, et qu'alors $T_-[\pm(\mu + t/4M)t] \neq 0$ par continuité dans la variable t). Donc, il est déduit que N(t) doit être finie pour $0 \geq t > \min(|t_0|, |t'_0|, |\mu^2 - 2\mu M|)$.

Si $|t_0|, |t'_0| > |\mu^2 - 2\mu M|$, nous pouvons utiliser le même théorème et en tirer la même conclusion sur la finitude de N(t) pour $\mu^2 - 2\mu M > t > \min(|t_0|, |t'_0|)$ la seule différence serait que l'expression $2N(t) + R(t) - \gamma(t) - 1$ dans l'équation (4.B.1) doit être remplacé par $2N(t) + R(t) - \gamma(t)$, car le pôle correspondant au nucléon est maintenant dans une des coupures. Si $|t_0|, |t'_0| > 4\mu M$, nous pouvons utiliser encore le même théorème pour $-4\mu M > t > t_0$ dans le demi plan Im $\nu > 0$ (et non plus dans le demi plan inférieur) le résultat est alors :

$$\frac{1}{\pi}\left[\arg T_-(+\infty + i\epsilon, t) - \arg T_-(-\infty + i\epsilon, t)\right] = N(t) - \gamma(t) \qquad (4.B.2)$$

ce qui implique que N(t) est toujours finie. Toutes ces propriétés restent valables quand le comportement asymptotique de $T_-(\nu, t)$ est déterminé par des pôles et des coupures de Regge.

Jorna et Mc Clure (12) ont étudié les zéros pour t = 0 et ils ont trouvé 1) deux zéros complexes $\nu_1 = (0.132 + i\ 0.00939)$ Gev, $\nu_1^* = (0.132 - i\ 0.00939)$ Gev,

2) il n'y a pas de zéros réels (R(0) = 0). En plus, en supposant que la diffusi
tique $\pi^{\pm} p$ vers l'avant est diffractive (c'est-à-dire $T_-(\nu)$ est essentielle
ginaire pour $\nu \to \pm\infty$), ils ont tiré comme conclusion que N (t=0) = 1. Donc
continuité des amplitudes dans la variable t impliquerait R(t) =0 et N(t)=1
$0 > t > t''_0$. Par la suite, et ayant comme but la simplicité des formules,
allons écrire nos équations en supposant que N(t) = 1 et R(t) = 0. Si cette
devient fausse, il n'y aura aucune difficulté à modifier les formules de fo
convenable et à inclure un nombre plus grand de zéros.

Les discussions faites dans la section 4.A. et dans la présente
ici, nous montrent que $T_-(\nu, t)$ satisfait les conditions de la section 2.A.
qu'il est possible d'écrire une représentation de module pour elle. Alors,
avons pour $0 \geq t > 2\mu M + \mu^2$, $\nu > \nu_0$ $\left(q'_L = [(\nu' - t/4M)^2 - \mu^2]^{1/2}\right)$;

$$\arg T_-(\nu+i\varepsilon,t) = \arg D(\nu,t) - \frac{\sqrt{\nu - (\mu + t/4M)^2}}{\pi} \cdot \left\{ P\int_{\nu_0}^{+\infty} \frac{d\nu' \ln\left[16\pi\mu^2 q'^2_L \frac{d\sigma(\nu',t)}{dt}\right] (1+2}{2\sqrt{\nu'^2 - (\mu + t/4M)^2}\ (\nu$$

$$- \int_{-\infty}^{-\nu_0} \frac{d\nu' \ln\left[16\pi\mu^2 q'^2_L \frac{d\sigma_+(-\nu',t)}{dt} (1 - 2\gamma_1 P_+(-\nu',t))\right]}{2\sqrt{\nu'^2 - (\mu + t/4M)^2}\ (\nu' - \nu)} +$$

$$+ \left(\int_{\mu+t/4M}^{\nu_0} + \int_{-\nu_0}^{-(\mu+t/4M)} \right) \frac{d\nu' \ln |T_-(\nu', t_2, t_1)|}{\sqrt{\nu' - (\mu+t/4M)^2}\ (\nu' - \nu)} \Bigg] \Bigg\} \quad (4.B.3)$$

$$D(\nu,t) = \exp\left[i \arg T_-(\nu = \mu + t/4M,\ t) \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\nu + (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_B - (\mu+t/4M)} + \sqrt{\nu - (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_B + (\mu+t/4M)}}{\sqrt{\nu + (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_B - (\mu+t/4M)} - \sqrt{\nu - (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_B + (\mu+t/4M)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\nu + (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1 - (\mu+t/4M)} - \sqrt{\nu - (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1 + (\mu+t/4M)}}{\sqrt{\nu + (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1 - (\mu+t/4M)} + \sqrt{\nu - (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1 + (\mu+t/4M)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\nu + (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1^* - (\mu+t/4M)} - \sqrt{\nu - (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1^* + (\mu+t/4M)}}{\sqrt{\nu + (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1^* - (\mu+t/4M)} + \sqrt{\nu - (\mu+t/4M)}\ \sqrt{\nu_1^* + (\mu+t/4M)}} \quad (4.$$

Pour une meilleure interprétation des équations ci-dessus, il est convena
rappeler les propriétés d'analyticité a), b), c) de $T_-(\nu, t)$ énoncée dans la
tion. Les intégrales dans l'équation (4.B.3) sont faites dans des parties
tes de la ligne AF de la figure 4. Elles correspondent respectivement aux
intervalles AB et EF (physiques et infinis) et BC et DE (non physiques ma
Une représentation pareille à celle donnée dans l'équation (4.B.3) mais se
pour t = 0, fut proposée par Odorico (11) ; son rapport avec le formalisme

Glauber fut étudié plus tard par Mc Clure et Jorna (33).

Pour $-2\mu M+\mu^2>t>-4\mu M$, la représentation de module pour $T_-(\nu,t)$ est aussi donnée par les équations (4.B.3) et (4.B.4) à une petite modification près: $D(\nu,t)$ ne doit plus contenir la fraction correspondant au pôle du nucléon. La contribution de celui-ci va être contenue maintenant dans l'intégrale sur l'intervalle non-physique $-\nu_0<\nu'<-(\mu+t/4M)$, à partir du moment où nous imposons son existence sur l'intervalle. Nous ne faisons plus de commentaires sur le pôle correspondant au nucléon, car une situation pareille va être trouvée en rapport avec la représentation de module pour $-4\mu M\geqslant t$ et les commentaires que nous allons faire là seront aussi valables pour ce cas-ci. Notez que maintenant nous avons une intégrale selon la ligne GH dans la figure 4.

Pour $-4\mu M>t$, il n'y a qu'une seule coupure $(-\infty<\nu'<+\infty)$, donc il faut utiliser la représentation de module présentée dans la section 2.A. L'hypothèse a) de cette section nous indique qu'il nous suffit de faire $A(Z) = Z-C(t)$, $C(t)$ étant un point arbitraire dans la région physique de la voie s. Alors, l'équation (2.A.4) devient ici :

$$= \frac{\nu-\nu_1(t)}{\nu-\nu_1(t)^*}\cdot\exp\left\{i\left[\arg T_-(c(t)+i\varepsilon,t)-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\nu_1(t)}{c(t)-\operatorname{Re}\nu_1(t)}+\frac{\nu-c(t)}{i\pi}\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\left[P_c\int_{\nu_0}^{+\infty}\frac{d\nu'\ln\left[16\pi\mu^2 q_t^2\,\frac{d\sigma_-(\nu',t)}{dt}\,(1+2n_1P_-(\nu',t))\right]}{2[\nu'-c(t)](\nu'-\nu)}+\right.$$

$$\left.\frac{d\nu'\ln\left[16\pi\mu^2 q_t^2\,\frac{d\sigma_+(\nu',t)}{dt}\,(1-2n_1P_+(\nu',t))\right]}{2[\nu'-c(t)](\nu'-\nu)}+\right.$$

$$\left.\left.\int\frac{d\nu'\ln|T_-(\nu',t)|}{[\nu'-c(t)](\nu'-\nu)}\right\}\right. \qquad (4.B.5)$$

Les intégrales sont faites selon les différentes parties de la ligne JL (figure 4) : elles correspondent aux intervalles IJ et KL (physiques et infinis) et JK (non-physique mais fini).

Il faut remarquer que l'équation (4.B.5) est une représentation pour $T_-\nu,t)$ dans $\operatorname{Im}\nu>0$, donc, pour obtenir $T_-(\nu,t)$ sur le demi plan inférieur (et en particulier pour obtenir l'amplitude physique pour la voie u, $\pi^+p\to\pi^+p$), il faut utiliser la propriété exprimée dans l'équation (4.A.10) . Une autre propriété de l'équation (4.B.5) est l'absence du pôle correspondant au nucléon en face de l'exponentielle. En réalité, le pôle du nucléon est contenu implicitement dans l'exponentielle car nous avons pour $\nu\simeq\nu_B$

$$T_-(\nu,t)\simeq\frac{-2\nu_B+i2\tau_1\frac{C(\nu_B,t)}{M}}{\left(1-t/4M^2\right)^{1/2}}\cdot\frac{G_r^2}{2M}\cdot\frac{\mu}{\nu-\nu_B}\cdot\delta_{\tau_2,\tau_1}$$

(G_π étant la constante de couplage π N). Cette expression fait sa contribution dernière intégrale dans l'équation (4.B.5) (car $|\nu_0| > \nu_B$), qui reste encore fin En fait, la singularité étant seulement logarithmique, il est possible de voir qu'il n'y a aucune problème en ce qui concerne la convergence de la représen tion. Si l'on veut, on peut faire apparaître le pôle du nucléon sous une forme plicite, en écrivant une représentation de module pour $T_-(\nu,t)_1 \equiv (\nu-\nu_B)T_-($ (t étant fixe dans $-4\mu M > t$, comme toujours).

Cette nouvelle représentation est essentiellement identique à celle l'équation (4.B.5), à quelques petites modifications près : 1) il faut inclure l facteurs $|\nu'-\nu_B|^2$ et $|\nu'-\nu_B|$ à l'intérieur des logarithmes appartenant première et à la deuxième intégrale, et 2) il faut remplacer arg $T_-(C(t) + i\epsilon$ par arg $T_-(C(t) + i\epsilon, t)_1$.

Les différentes phases arg $T_-(\mu + t/4M, t)$, arg $T_-(C(t) + i\epsilon, t)$ qu été introduites dans les formules antérieures ne seront pas fixes, cela n'est nécessaire ici. La représentation de module pour $T_{(t)}(t, u, \tau'_2, \tau_1)$ pour u dans le plan complexe t peut être écrite de la même manière. Soient $t_m(u)$, $t_m(u)^*$ ($\mathrm{Im}\, t_m(u) > 0$), m = 1... M(u) les zéros de $T_{(t)}(t,u)$ dans Im $t \neq 0$ (no n'indiquerons plus sa dépendance avec les transversités τ'_2 τ_1 , d'une manièr explicite). Des hypothèses et des arguments pareils à ceux donnés pour $T_-($ ainsi qu'un rappel des propriétés de $T_{(t)}(t,u)$ exprimées dans la section 4.A nous permettent de dire que M(u) est fini et qu'il nous suffirait de faire A(Z) Z - C(u) pour avoir la convergence, comme toujours (ici, C(u) étant un point appartenant à la région physique de la voie s).

Ici, il n'y a pas de théorème optique, alors l'hypothèse de la non-c lation pour u fixe quand t devient grande est, peut-être, plus dangereuse. Po appuyer cette hypothèse, il faut remarquer que quelques théories (comme les dèles des pôles et des coupures de Regge) confirment que $\lim_{t\to\pm\infty} \arg T_{(t)}(t,u)$ existe. Donc, la représentation de module est :

$$T_{(t)}(t,u) = B(t,u)\exp\left\{ i\left[\varphi(u) - \arg B(C(u),u)\right] + \right.$$

$$+ \frac{t-C(u)}{i\pi}\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt'\, \ln\left[8\pi\frac{u^2}{M^2}\lambda(t,M^2,M^2)\frac{d\sigma_{(t)}(t',u)}{ds}(1+2\tau_1 P_{(t)}(t',u))\right]}{2\left[t'-C(u)\right](t'-t)} \qquad (4.B.$$

$$\left. + \frac{t-C(u)}{i\pi}\int_{-\infty}^{t_0} \frac{dt'\, \ln|T_{(t)}(t',u,\tau_2,\tau_1)|}{\left[t'-C(u)\right](t'-t)} \right\}$$

$$t'+u = 2(M^2+\mu^2), \qquad B(t,u) = \prod_{m=1}^{M(u)} \frac{t-t_m(u)}{t-t_m(u)^*}$$

$$u) = -\alpha(\tau'_2) - \arg T_-(\nu+i\varepsilon, t) \; ; \quad \nu = \frac{u^2+M^2-u}{2M} . \qquad (4.B.7)$$

$|T_{(t)}(t',u,\tau'_2,\tau'_3)|$ étant donné en termes de $\frac{d\sigma_-}{dt}$, P_- pour $t' < 0$ au moyen des équations (4.A.16) et (4.A.18). Ici, les intégrales sont faites sur la ligne MP (voir figure 4). L'intervalle fini non-physique NO correspond à une partie de la deuxième intégrale, tandis que les intervalles infinis physiques MN (voie t) et OP (voie s) correspondent à la première et à l'autre partie de la deuxième intégrale.

Il est clair que les équations (4.B.3), (4.B.5) et (4.B.6) peuvent être utilisées pour calculer les amplitudes pour $\pi^+ p$ et $\bar{p}p \to \pi^+ \pi^-$ à partir des données expérimentales sur les sections efficaces différentielles et des polarisations, quand les zéros complexes et les contributions de la région non-physique sont connus. Une méthode approchée pour calculer ces dernières, consiste à faire une comparaison entre les phases des amplitudes de transversité : a) calculées approximativement à partir des résultats de l'analyse à ondes partielles et b) exprimées en termes des données expérimentales, comme nous l'avons dit auparavant et un certain nombre de paramètres inconnus, à savoir les positions des zéros complexes et quelques coefficients au moyen desquels le logarithme de l'amplitude dans la région non-physique est exprimé en termes de quelques fonctions connues (comme les polynomes de Legendre ou de Tchbicheff). Plus tard, nous donnerons quelques autres méthodes, plus raffinées, pour trouver les zéros et la contribution de la région non-physique, ainsi comme quelques restrictions sur les données expérimentales.

La représentation de phase pour la diffusion $\pi^\pm p$ vers l'avant, peut être écrite directement à partir des hypothèses a), b), c) de cette section. Comme toujours, nous aurons la convergence si $A(Z) = Z - C$ est choisie (C étant un point de la région physique du tunnel s). Nous avons alors :

$$T_-(\nu) = |T_-(c)| \cdot \frac{B(\nu)}{|B(c)|} \cdot \exp\left\{ i \arg T_-(\mu) + \frac{\nu-c}{\pi} \cdot \right.$$

$$\left. \left[\int_{\mu}^{+\infty} \frac{d\nu' \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha_-(\nu)} - \arg T_-(\mu) \right]}{(\nu'-c)(\nu'-\nu)} + \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{d\nu' \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha_+(\nu')} - \arg T_-(\mu) \right]}{(\nu'-c)(\nu'-\nu)} \right] \right\} \qquad (4.B.8)$$

$$\alpha_\mp(\nu') = \frac{\operatorname{Re} T_\mp(\nu')}{\operatorname{Im} T_\mp(\nu')} \quad , \quad 1+\alpha_\mp^2 = \frac{16\pi \frac{d\sigma_\mp}{dt}}{\left[\sigma_{\mp,\,tot}\right]^2} \qquad (4.B.9)$$

$$B(\nu) = \frac{[\nu - \nu_1(t=0)][\nu - \nu_1(t=0)^*]}{\nu - \nu_B} \qquad (4.B.10)$$

Il faut rappeler qu'ici il est possible de mesurer les grandeurs $\alpha_{\mp}(\nu')$ au moyen de l'interférence de Coulomb (34).

Il y a quelques problèmes sur l'inter relation entre les représentations de module et de phase et les zéros complexes pour les différentes voies, grâce à l'analyticité à deux variables. Même s'ils ne sont pas étudiés en détail dans ce travail, nous donnerons quelques idées approchées. Etant donné que l'amplitude T a des propriétés d'analyticité à deux variables, nous pouvons espérer que $\ln\left(\frac{T}{x}\right)$ (x étant une fonction qui contient tous, et seulement les zéros complexes dans les plans complexes s et t à la fois), divisé par un polynôme convenable dans s et t pour avoir la convergence, va satisfaire, en quelque sorte, la représentation de Mandelstam, à partir de laquelle nous pouvons obtenir les représentations de phase et de module présentées auparavant (d'une forme pareille à l'obtention des relations de dispersion habituelles à partir de la représentation de Mandelstam habituelle). Il est clair que, pour t fixe dans $0 \geq t > -\infty$ (u fixe dans $u \geq 0 > -\infty$), les solutions de l'équation x = 0 dans le plan complexe ν ne seront que les zéros complexes $\nu(t)$ $(t_m(u))$ considérés auparavant. Il y a un problème important et difficile, à savoir que x soit un polynôme dans les variables ν, t ou bien une fonction beaucoup plus compliquée (peut-être une fonction entière). Dans le premier cas, nous pouvons être sûrs que le nombre de zéros complexes $\nu_n(t)$, $(t_m(u))$, va être fini pour toutes les valeurs de t(u). Dans le deuxième cas, les choses deviendront beaucoup plus compliquées. Nous nous limiterons à ces remarques et laisserons ces problèmes ouverts, avec l'espoir de revenir à eux dans un prochain travail. Nous remarquerons que quelques études ont été faites dans cette direction par M. Sugawara et Y. Nambu (Phys. Rev. 131 (1963), 2335).

Etant donné que les hypothèses b) et c), faites dans le début de cette section, impliquent la validité du théorème de Pomeranchuk et, en rappelant que la validité de ce théorème a été contestée dans quelque mesure, d'après la publication des premiers résultats des expériences de Serpukhov (35), il est assez convenable de faire quelques remarques sur la phase asymptotique des amplitudes de transversité et des zéros complexes quand on suppose que ce théorème n'est

plus valable. Il faut remarquer que $\lim_{\nu \to \pm \infty} \arg T_-(\nu, t)$ peut exister et être même finie quand les hypothèses b) et c) ne sont plus faites (Prof. D. Atkinson, communication privée).

Alors, si ces limites existent et sont finies, étant donné que $\gamma(t)$ est encore fini et que $\arg T_-(\pm(\mu + t/4M)$ est encore fini pour $0 \geq t > t_0$, on déduit que le nombre des zéros est encore fini et que les représentations de module, présentées dans cette section sont encore valables. Cette situation est trouvée, par exemple, quand l'amplitude est réelle à de hautes énergies, c'est-à-dire, $\frac{\mathrm{Re}\, T_-(\nu)}{\mathrm{Im}\, T_-(\nu)} \to h_{\mp} \ln|\nu|$ si $\nu \to \pm\infty$, avec $h_{\pm} \neq 0$, et si $\sigma_{\mp}(\nu)_{tot} \to \sigma_{\mp}(+\infty)_{tot} \neq 0$ pour $\nu \to +\infty$ (avec $\sigma_-(+\infty)_{tot} \neq \sigma_+(+\infty)_{tot}$). Alors, en tenant compte de $T_-(\mu) > 0$, $T_-(-\mu) < 0$ (26), $\gamma(0) = 1$ et $\mathrm{Im}\, T_-(\nu) \geq 0$, $\mathrm{Im}\, T_+(\nu) \geq 0$ pour $\mu \leq \nu < +\infty$ (grâce au théorème optique) en choisissant $\arg T_-(\mu) = 0$ et $\arg T_-(-\mu) = \pi$, on voit que l'équation (4.B.1) implique $N(0) = 1$, c'est-à-dire que nous arrivons à la même conclusion que Jorna et Mc Clure (12) (la position des zéros étant la même, bien sûr). Par continuité dans t, on obtient $R(t) = 0$, $N(t) = 1$ pour $0 \geq t > t_0$.

Il faut souligner que si, dans le cas le plus complexe, on suppose que $\lim_{\nu \to +\infty} [\arg T_-(\nu + i\epsilon, t) - \arg T_-(-\nu + i\epsilon, t)]$ n'existe pas ou qu'elle est infinie, de façon à avoir un nombre de zéros N(t) infini, la représentation de module est encore valable si les zéros complexes satisfont une condition de convergence pareille à celle dont nous avons parlé dans l'hypothèse b) section 2.B., mais il est bien compréhensible que l'utilité de cette représentation serait vraiment très petite.

CHAPITRE V

SUPERCONVERGENCE POUR LA REPRESENTATION DE MODULE

Nous allons considérer une fonction f(Z) qui est définie, soit dans Im Z > 0, soit dans Im Z ≠ 0, et qui satisfait les conditions établies dans les sections 2.A et 2.B respectivement. En plus, soit G(Z) une fonction <u>que nous supposons connue explicitement,</u> ayant les propriétés suivantes : a) Elle est analytique dans Im Z > 0 et possède un nombre fini de zéros d'ordre fini, B_ℓ, $\ell = 1 \ldots L$ dans le demi plan supérieur et un nombre fini de pôles et de zéros pareils sur l'axe réel ; b) Si Z → ∞ selon une direction réelle ou complexe quelconque dans Im Z > 0, alors :

$$\frac{f(z)}{G(z)} \longrightarrow 1 + O_q\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad q > 1 \tag{5.1}$$

$$\lim_{Z \to \infty} Z^q \, O_q\left(\frac{1}{Z}\right) = 0 \text{ ou finie,} \qquad \lim_{z \to \infty} z^{q+\eta} \, O_q\left(\frac{1}{z}\right) = \infty \tag{5.2}$$

pour $\eta > 0$ arbitraire.

c) Il n'y a aucune singularité réelle de G(Z) qui puisse nous empêcher d'utiliser le théorème de Cauchy comme suivi.

A partir des hypothèses antérieures, notant que $\frac{f(Z)}{G(Z)}$ a des pôles complexes dans Im Z > 0 et en faisant un calcul pareil à celui que nous avons utilisé pour les équations (2.A.4) et (3.7), nous arrivons à obtenir la représentation suivante de module "superconvergent", dans Im Z > 0 :

$$\frac{f(z)}{G(z)} = f_B(z) \prod_{\ell=1}^{L} \frac{z - \beta_\ell^*}{z - \beta_\ell} \cdot \exp\left\{ i 2 m' \pi + \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' \ln\left|\frac{f(x')}{G(x')}\right|}{x' - z} \right\} \tag{5.3}$$

m' étant un entier, et f_B étant donné dans l'équation (2.A.1) <u>avec N fini.</u>

En fait, l'équation (5.3) est valable, même si L et N sont infinis, si les zéros B_ℓ satisfont une condition de convergence pareille à celle énoncée dans l'hypothèse b) de la section 2.A. pour les Z_n's, et si $\frac{f(z)}{G(z)} \cdot \frac{1}{f_B(z)} \cdot \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{z - \beta_\ell}{z - \beta_\ell^*}$ satisfait les conditions (5.1) et (5.2). L'équation (5.3) est aussi valable si G(Z) a un nombre infini de zéros et de pôles réels d'ordre infini, si la condition c) de cette section est satisfaite.

Pour simplifier, nous allons supposer que L et N sont finis, que $q \leq 2$ et que $\ln\left|\frac{f(x')}{G(x')}\right|$ est une fonction non-oscillante quand $x' \to \pm\infty$ au sens de

la référence (31). Cette dernière hypothèse implique que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx' \ln\left|\frac{f(x')}{G(x')}\right|}{x'-z} \xrightarrow[\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z>0}]{} -\frac{1}{z}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \ln\left|\frac{f(x')}{G(x')}\right| + O'\left(\frac{1}{z}\right) \tag{5.4}$$

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z>0}} z\, O'\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \tag{5.5}$$

la convergence de l'intégrale étant assurée grâce aux équations (5. 1), (5. 2). Nous allons revenir à l'équation (5. 3) tout en considérant les faits suivants :

i) l'exponentielle est développée dans une série de puissances pour Im Z > 0,

ii) les équations (5. 4) et (5. 5) sont considérées,

iii) $f_B(Z)$ et $\prod_{\ell=1}^{L} \frac{Z-\beta_\ell}{Z-\beta_\ell^*}$ sont développées,

iv) l'ordre des termes dans les différents développements est interchangé,

v) les deux premiers termes sont écrits explicitement.

Alors, nous allons voir :

$$\frac{f(z)}{G(z)} \xrightarrow[\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z>0}]{} \exp(i2m'\pi).\left\{1 + \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \ln\left|\frac{f(x')}{G(x)}\right| + 2i\sum_{\ell=1}^{L} \mathrm{Im}\,\beta_\ell - \right.\right. \tag{5.6}$$

$$\left.\left. - 2i\sum_{n=1}^{N} \mathrm{Im}\, z_n\right]\right\} + O''\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z>0}} z\, O''\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \tag{5.7}$$

En rappelant que m' est un entier et en faisant la comparaison entre les équatio (5. 6), (5. 7) et (5. 1), (5. 2), nous obtenons la règle de somme superconvergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \ln\left|\frac{f(x')}{G(x')}\right| = -2\sum_{\ell=1}^{L} \mathrm{Im}\,\beta_\ell + 2\sum_{n=1}^{N} \mathrm{Im}\, z_n \tag{5.8}$$

D'autres règles de somme d'ordre supérieur, correspondant à q > 2 peuven être aussi obtenues d'une façon identique.

Les équations (5. 3) et (5. 8) peuvent être utiles pour calculer l'ampli de diffusion non-relativiste et dans π^+ p si on connaît G(Z) dans chaque cas.

Dans le cas de la diffusion non-relativiste, l'équation (3.4) nous suggère de faire $G = f_{BORN}$, ce qui implique qu'il n'y a pas de zéros β_ℓ dans ce cas. Cependant, nous soulignons qu'une telle identification peut être fausse et doit être démontrée, car la validité de l'équation (3.4) est nécessaire, mais non suffisante pour celle des équations (5.1) et (5.2).

Dans le cas de la diffusion $\pi^{\pm} p$, le modèle à pôles de Regge nous donne des expressions explicites pour G : celle-ci serait la somme des amplitudes, dans le cas de Regge, correspondant aux différentes trajectoires de Pomeranchuk et du méson ρ, bien que cette somme doit satisfaire vraiment les équations (5.1) et (5.2). Si celles-ci ne sont pas satisfaites, il faut alors tenir compte des nouvelles trajectoires ou même des coupures de Regge, pour arriver à obtenir une "bonne" G. Maintenant $|f(x')|$ n'est que $|T_-(\nu', t)|$ et celui-ci peut être remplace par des données expérimentales pour $\nu > \nu_0$ et $\nu < \nu_0$ en utilisant l'équation (4.A.8) et son partenaire pour $\pi^+ p \to \pi^+ p$. Il faut souligner que, quand on a déjà une expression explicite pour G, alors les zéros β_ℓ peuvent être trouvés directement en faisant une exploration du plan complexe au moyen de l'expression donnée pour G. Alors, l'équation (5.8) devient une restriction pour $|T_-(\nu', t)|$ dans $-\nu_0 < \nu' < +\nu_0$ et dans quelques régions physiques où il n'y a pas de données expérimentales, ainsi que pour les zéros complexes de $T_-(\nu, t)$.

Il faut remarquer qu'en utilisant l'équation (5.3) pour $Z = \nu$ dans les régions physiques des voies s ou u à basse énergie, où l'on connaît déjà l'amplitude directement à partir de la connaissance des déphasages, et en faisant une comparaison convenable, il est possible de trouver de nouvelles restrictions sur $|T_-(\nu', t)|$ et sur les zéros. Nous pourrions faire des développements pareils pour $\bar{p} p \to \pi^+ \pi^-$.

Il y a une autre application possible des équations (5.3) et (5.8) pour la diffusion $\pi^{\pm} p$ vers l'avant où l'on connaît <u>déjà</u> approximativement les zéros complexes. Alors $|T_-(\nu')|$ peut être trouvé aussi approximativement à partir des relations de dispersion. Les équations (5.3) et (5.8) peuvent être utilisées pour relier les valeurs de $|T_-(\nu)|$ de la région de haute énergie aux valeurs des paramètres contenus dans la fonction G, d'une façon analogue à celle utilisée dans les applications courantes des règles de somme à énergie finie. Il faut dire que nous n'avons essayé de faire aucune interprétation "dualiste" pour l'équation (5.8) dans le cas présent.

CHAPITRE VI

LES ZEROS POUR UNE DIFFUSION VERS L'AVANT

Si la contribution de la région non-physique s'annule pour la diffusion vers l'avant (et ceci est bien le cas pour la diffusion d'une particule non-relativiste sous l'action d'un potentiel et pour la diffusion π N relativiste), on peut exprimer directement les zéros complexes et les pôles correspondant aux états liés en termes de données expérimentales, à l'aide du théorème optique.

Par exemple, dans le cas de la diffusion non-relativiste, et en faisant la comparaison de l'équation (3.7) pour t = 0 et de l'équation (3.8) on obtient pour s quelconque :

$$\frac{(-)^B \prod_{i=1}^{B} \left[\frac{\sqrt{s}+i\sqrt{s_i}}{\sqrt{2ms_i}}\right]^2}{\prod_{n=1}^{N(0)} \left[\frac{\sqrt{2ms}+K_n(0)}{\sqrt{2m}\,K_n(0)}\right]\left[\frac{\sqrt{2ms}-K_n(0)^*}{\sqrt{2m}\,K_n(0)^*}\right]} = m\sqrt{\frac{d\sigma(0,0)}{d\Omega}}\,.$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{s}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{ds'\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha(s')} - \pi n_0(0)\right]}{s'(s'-s)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{s}}{2i\pi}\int_0^{+\infty} \frac{ds' \ln\left[m^2 \frac{d\sigma(s',0)}{d\Omega}\right]}{\sqrt{s'}\,(s'-s)}\right\} \qquad (6.1)$$

Cette équation montre que les données $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s',0)$ et $\sigma_{tot}(s')$ ne peuvent être des fonctions arbitraires, mais elles doivent être restreintes d'une façon très sévère, car le premier terme de l'équation (6.1) doit être une fonction rationnelle de $\sqrt{s}$. Autrement dit, il y a des restrictions et inter relations très fortes entre $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s'0)$ et $\sigma_{tot}(s')$ pour les différentes valeurs des variables cinématiques pour qu'il existe une amplitude de diffusion vers l'avant qui satisfasse les propriétés d'analyticité énoncées au début du chapitre 3 (lesquelles impliquent, pour le dire d'une manière qualitative, une relation entre le module et la phase de l'amplitude), l'unitarité (qui implique une autre relation différente) et qui soit en correspondance avec les données expérimentales.

Il est évident qu'on peut obtenir le même résultat pour la diffusion π vers l'avant, en combinant l'équation (4.B.8) avec la représentation de module (4.B.3) correspondant à ν complexe, pour $t = 0$. On trouve, dans ce cas, des restrictions similaires entre les données expérimentales. Il faut remarquer qu ceci donne une méthode pour trouver le zéro ν_1 $(t=0)$ qui est bien différente de celle utilisée dans (12).

CHAPITRE VII

QUELQUES APPROXIMATIONS A HAUTE ENERGIE

Etant donné les faits suivants : i) La contribution de la région non-physique à la représentation de module n'est qu'une intégrale sur un intervalle fini au-dessous du seuil, ii) Le nombre des zéros complexes est fini dans le cadre des hypothèses faites auparavant et leur contribution à la représentation de module est une fraction. Il est alors facile de voir que pour t fixe et pour une énergie assez grande, la phase de l'amplitude est déterminée d'une manière univoque par les données expérimentales, à un facteur de phase dépendant de t mais indépendant de l'énergie. Nous étudierons cette question avec plus de détail pour la diffusion πN. Pour ν réel et tel que $\nu \gg\gg \nu_0$, on obtient, à partir des équations (4.B.3) et (4.B.4) :

$$\cdots \frac{\sqrt{\nu_B - (\mu + t/4M)} - \sqrt{\nu_B + (\mu + t/4M)}}{\nu_B - (\mu + t/4M) + \nu_B} \cdots$$

$$\cdots \frac{\sqrt{\nu_3(t)^* - (\mu - t/4M)} - \sqrt{\nu_3(t)^* + (\mu + t/4M)}}{\sqrt{\nu_3(t)^* - (\mu - t/4M)} + \sqrt{\nu_3(t)^* + (\mu + t/4M)}} \quad (7.1)$$

$$\times \exp\left\{ \frac{\sqrt{\nu^2 - (\mu + t/4M)}}{i\pi} \left[\int_{\mu + t/4M}^{\nu_0} + \int_{-\nu_0}^{-(\mu + t/4M)} \right] \frac{d\nu' \ln |T_-(\nu' t)|}{\sqrt{\nu'^2 - (\mu + t/4M)^2}\,(\nu' - \nu)} \right\} \cdots$$

$$\cdots \exp\left\{ \frac{1}{\cdots} \left[\int_{\mu + t/4M}^{\nu_0} + \int_{\cdots}^{\cdots} \right] \frac{d\nu' \ln |T_-(\nu' t)|}{\sqrt{\nu'^2 - (\mu + t/4M)^2}} \right. \quad (7.2)$$

En définissant un facteur de phase $\exp\left[i\, F_-(t) \right]$ comme le produit des deux facteurs de phase antérieurs, on a :

$$\cdots \ln T_-(\nu + i\epsilon, t) \simeq F_-(t) - \frac{\sqrt{\nu^2 - (\mu + t/4M)^2}}{2\pi} \cdots$$

$$\nu \gg \nu_0$$

$$\cdots \left\{ P \int_{+\cdots}^{+\cdots} \frac{d\nu' \left[\cdots \ln |T_-(\nu' t)| \right]}{\sqrt{\nu'^2 - (\cdots)^2}\,(\nu' - \nu)} - \right. \quad (7.3)$$

$$\left. - \int_{+\cdots}^{-\nu_0} \frac{\left[\cdots \ln |T_-(\nu' t)| - \cdots \right] d\nu'}{\sqrt{\nu'^2 - (\cdots + t/4M)^2}\,(\nu' - \nu)} \right\}$$

Il y a une formule analogue pour $-2\mu M + \mu^2 > t > -4\mu M$, la seule différence est que le facteur de phase $F_-(t)$ ne contient pas la fraction correspondant au pôle du nucléon, qui est contenu dans l'intégrale sur la région non-physique.

Il faut remarquer que, même si les deux intégrales "physiques" dans l'équation sont faites formellement sur les régions physiques complètes des voies s et u, la dépendance dans ν qui vient des régions voisines aux seuils ν_0, $-\nu_0$ (mais qui ne contient peut-être pas les régions des isobares $N^*_{3/2,3/2}$), est très faible. Les régions d'intégration "effectives" sont donc moins importantes.

Si ν est réel, positif et très grand, la deuxième intégrale physique correspondant à la voie u peut être omise et sa limite (qui peut être trouvée d'une façon identique à l'équation (7.2.)) est un facteur de phase, dépendant de t, qui peut être contenu dans une nouvelle $F_-(t)$ "effective".

Pour $-4\mu M \geq t$ et en supposant que la constante $c(t)$ est voisine du seuil ν_0, un raisonnement tout à fait identique pour $\nu >> \nu_0$ transforme l'équation (4.B.5) dans

$$T_-(\nu,t) \cong \exp[iG(t)] \cdot \exp\left\{ \frac{\nu - c(t)}{2\pi i} \left[P \int_{\nu_0}^{+\infty} \frac{d\nu' \ln\left[16\pi\mu^2 q_t^2 \frac{d\sigma_-}{dt}(1+2\tau_1 P_-)\right]}{[\nu' - c(t)](\nu' - \nu)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{-\infty}^{-\nu_0} \frac{d\nu' \ln\left[16\pi\mu^2 q_t^2 \frac{d\sigma_+}{dt}(1-2\tau_1 P_+)\right]}{[\nu' - c(t)](\nu' - \nu)} \right] \right\} \qquad (7.4)$$

$$\exp[iG(t)] = \exp\left\{ i\left[\arg T_-(c(t)+ic_1 t) - \frac{1}{\pi} \int_0 \frac{\mathrm{Im}\,\gamma_1(t)}{c(t) - \mathrm{Re}\,\gamma_1(t)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\nu_0}^{+\nu_0} \frac{d\nu' \ln|T_-(\nu' t)|}{\nu' - c(t)} \right] \right\} \qquad (7.5)$$

Il faut souligner que si ces approximations sont valables pour la région des énergies moyennes, où l'amplitude peut être connue encore en termes de l'analyse à ondes partielles, il est donc possible de faire une estimation des facteurs de phase $F(t_-)$, $G(t)$ en établissant une comparaison. On peut faire les mêmes approximations pour les amplitudes dans le cas d'une diffusion non-relativiste et pour $\bar{p}p \to \pi^+ \pi^-$.

CHAPITRE VIII

UNE REGLE DE SOMME

POUR UNE DIFFUSION VERS L'AVANT

Dans les différents cas que nous avons traités, nous avons vu que la phase d'une amplitude de diffusion vers l'avant tend à une limite finie quand l'énergie s'approche de l'infini.

Pour le cas de la diffusion $\pi^{\pm}$ p : i) le fait remarqué ci-dessus, ii) une nouvelle condition "technique" (voir l'équation (8. 2) ci-dessous) et iii) une hypothèse physique concernant l'amplitude de diffusion vers l'avant à très haute énergie, vont nous donner une nouvelle règle de somme, comme nous allons le voir plus loin.

En tenant compte de l'équation (4. B. 3) pour t = 0 et en faisant $\nu \to \infty$, on a :

$$\lim_{\nu \to +\infty} \arg T_-(\nu + i\epsilon) = \arg D(+\infty, t=0) + \arg T_-(\mu) - \frac{1}{\pi} \lim_{\nu \to +\infty} \sqrt{\nu^2 - \mu^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ P_{\nu} \int_{\nu_0}^{+\infty} \frac{d\nu' \ln\left[16\pi\mu^2 q_L'^2 \frac{d\sigma_-(\nu',0)}{dt}\right]}{2\sqrt{\nu'^2 - \mu^2}\,(\nu' - \nu)} - \int_{-\infty}^{-\nu_0} \frac{d\nu' \ln\left[16\pi\mu^2 q_L'^2 \frac{d\sigma_+(\nu',0)}{dt}\right]}{2\sqrt{\nu'^2 - \mu^2}\,(\nu' - \nu)} \right\} \qquad (8.1)$$

L'hypothèse de non-oscillation (rappel des hypothèses b) et c) de la section 4. B.) implique que lim art $T_-(\nu + i\epsilon)$ existe, donc que la limite des deux intégrales du deuxième terme de l'équation (8. 1) existe aussi. Si nous supposons que l'intégrale

$$I = \int_{\nu_0}^{+\infty} \frac{d\nu' \ln\left\{ \frac{q_L(\nu')^2}{q_L(-\nu')^2} \cdot \frac{\frac{d\sigma_-(\nu',0)}{dt}}{\frac{d\sigma_+(\nu',0)}{dt}} \right\}}{\sqrt{\nu'^2 - \mu^2}} \qquad (8.2)$$

existe et est finie (il faut noter que la propriété ii) de la section 4. B. n'est plus suffisamment forte pour l'impliquer) alors, on peut substituer les dénominateurs $\frac{1}{\nu' - \nu}$ par $-\frac{1}{\nu}$ à l'intérieur des intégrales de l'équation (8. 1) (31). Donc, en se rappelant la définition du facteur de phase $F_-(t)$ (voir les équations (7. 1) et (7. 3), on comprend bien que l'équation (8. 1) devienne finalement

$$\arg T_-(+\infty + i\epsilon) - F_-(t=0) = -\frac{1}{2\pi} I \qquad (8.3)$$

l'expression $F_-(t=0)$ étant connue, parce que le zéro complexe $\nu_1(t=0)$ a été déjà trouvé (12), et que $\arg T_-(\mu) = 0$ par convention. Alors, nous pouvons faire, comme hypothèse physique, que la diffusion $\pi^- p$ vers l'avant est diffractive, alo $\arg T_-(\infty + i\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$. Donc, l'équation (8.3) devient une véritable règle de somme pour $\frac{d\sigma_-(\nu;0)}{dt} \Big/ \frac{d\sigma_+(\nu;0)}{dt}$.

Si nous ne faisons pas l'hypothèse diffractive, mais que nous supposio $\frac{\mathrm{Re}\, T_-(\nu)}{\mathrm{Im}\, T_-(\nu)} \to h_{\pm} \ln|\nu|$, $\sigma_-(+\infty)_{tot} \neq \sigma_+(+\infty)_{tot}$ (il faut se rappeler des commentai res à la fin de la section 4.B) le théorème de Pomeranchuk n'est plus satisfait, alors on peut démontrer encore que $\lim_{\nu \to +\infty} \left| \frac{T_-(\nu)}{T_-(-\nu)} \right| = 1$ en utilisant la même technique que dans (31). Donc, on a $\arg T_-(+\infty + i\varepsilon) = 0$ et l'équation (I.3) devient encore une règle de somme.

On peut faire une étude analogue pour la diffusion non-relativiste, en tenant compte du fait que : $\lim_{s \to +\infty} f(s,t) = f_{BORN}(t)$ est une fonction réelle.

CHAPITRE IX

NOUVELLES RESTRICTIONS ET REGLES DE SOMME A PARTIR DE $\pi^- p \to \pi^0 n$

Jusqu'ici, rien n'a été dit sur la réaction d'échange de charge, $\pi^- p \to \pi^0 n$. En utilisant l'équation (4.A.5) et l'invariance d'isospin, l'amplitude de transversité $T_0(\nu, t, \tau_2, \tau_1)$ (τ_1, τ_2 étant les transversités du proton et du neutron dans le repère du laboratoire) pour cette nouvelle réaction, peut être exprimée en termes de l'amplitude habituelle $T_-(\nu, t, \tau_2, \tau_1)$ comme suit :

$$T_0(\nu, t, \tau_2, \tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ T_-(-\nu, t, -\tau_2, -\tau_1) - T_-(\nu, t, \tau_2, \tau_1) \right\} \qquad (9.1)$$

$$\mathrm{Re}\,\nu \geq \nu_0 \quad , \quad \mathrm{Im}\,\nu = \epsilon \to 0^+$$

Même si on peut écrire une équation analogue à l'équation (4.A.8) et une représentation de module pour $T_0(\nu, t, \tau_2, \tau_1)$, il nous semble meilleur d'utiliser l'équation (9.1) et les données expérimentales pour $\pi^- p \to \pi^0 n$: $\frac{d\sigma_0}{dt}$ (section efficace différentielle non-polarisée) et P_0 (polarisation) pour avoir de nouvelles équations pour $\arg T_-(\nu + i\epsilon, t, \tau_2, \tau_1)$. En fait, en prenant le module carré de l'équation (9.1) et en exprimant $T_0(\nu, t, \tau_2, \tau_1)$ en fonction de $\frac{d\sigma_0}{dt}$, P_0, on arrive très facilement à l'équation suivante, pour $\tau_2 = \tau_1$:

$$\cos\left\{ \arg T_-(-\nu + i\epsilon, t, -\tau_2, -\tau_1) - \arg T_-(\nu + i\epsilon, t, \tau_2, \tau_1) \right\} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{d\sigma_+(-\nu,t)}{dt}\left[1 - 2\tau_1 P_+(-\nu,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{d\sigma_-(\nu,t)}{dt}\left[1 + 2\tau_1 P_-(\nu,t)\right] - \frac{d\sigma_0}{dt}(\nu,t)\left[1 + 2\tau_1 P_0(\nu,t)\right]}{\sqrt{\frac{d\sigma_+(-\nu,t)}{dt}\left[1 - 2\tau_1 P_+(-\nu,t)\right]\frac{d\sigma_-(\nu,t)}{dt}\left[1 + 2\tau_1 P_-(\nu,t)\right]}} \qquad (9.2)$$

qui donne de nouvelles restrictions sur les valeurs de $\arg T_-(\nu + i\epsilon, t, \tau_2, \tau_1)$ (quelle que soit la méthode pour obtenir ces dernières valeurs).

En combinant l'équation (9.2) avec les propriétés i) et ii) de la section 4 B et en rappelant les équations (4.A.8) et (4.A.10), on obtient pour $0 \geq t > t_0$

$$\cos\left[\arg T_-(-\infty - i\epsilon, t, -\tau_2, -\tau_1) - \arg T_-(+\infty + i\epsilon, t, \tau_2, \tau_1) \right] =$$

$$= 1 - \lim_{\nu \to +\infty} \left\{ \frac{\frac{d\sigma_0(\nu,t)}{dt}}{\frac{d\sigma_-(\nu,t)}{dt}} \cdot \frac{1 + 2\tau_1 P_0(\nu,t)}{1 + 2\tau_1 P_-(\nu,t)} \right\} \qquad (9.3)$$

La limite du deuxième membre de cette équation existe nécessairement, car les autres quantités existent aussi et sont finies.

L'équation (9.3) peut devenir une règle de somme de la même façon que l'équation (8.1) est devenue la règle de somme (8.3). En fait, pour $0 \geq t > \mu^2 - 2\mu M$, en rappelant l'équation (4.B.3), en faisant $\nu \to +\infty$ et en supposant

l'existence de l'intégrale

$$I(\tau) = \int_{\nu_0}^{+\infty} \frac{d\nu' \ln \left\{ \frac{q_L(\nu')^2 \frac{d\sigma_-}{dt}(1+2\tau P_-)}{q_L(-\nu')^2 \frac{d\sigma_+}{dt}(1-2\tau P_+)} \right\}}{\sqrt{\nu'^2 - (\mu + t/4M)^2}} \qquad (9.4)$$

(il faut noter que $I(\tau)$ est la généralisation de l'intégrale I dans l'équation (8.2)), en prenant la limite de la même façon que quand on est passé de l'équation (8.2) à l'équation (8.3) et en faisant les mêmes considérations pour arg $T_-(-\infty, t, -\tau_2, -\tau_1)$ l'équation (9.3) devient la règle de somme ($\tau_2 = \tau_1$) :

$$\cos\left\{F_+(t,-\tau_2,-\tau_1) - F_-(t,\tau_2,\tau_1) + \frac{1}{2\pi} I(\tau_1) + \frac{1}{2\pi} I(-\tau_1)\right\} =$$

$$= 1 - \lim_{\nu \to +\infty} \left\{ \frac{\frac{d\sigma_0}{dt}}{\frac{d\sigma_-}{dt}} \cdot \frac{1+2\tau_1 P_0}{1+2\tau_1 P_-} \right\} \qquad (9.5)$$

$F_-(t, \tau_2, \tau_1)$ étant définie d'après les équations (8.1) et (8.2) dans la section 8, (ici nous avons écrit les transversité explicitement). $F_+(t, -\tau_2, -\tau_1)$ est définie d'une façon identique à $F_-(t, \tau_2, \tau_1)$, la seule différence est qu'on prend la limite $\nu \to -\infty$ selon le bord inférieur de la coupure gauche.

Il faut remarquer que si $\lim_{\nu \to +\infty} P_-(\nu, t) \neq \pm 1$, alors la règle d'Okun et Pomeranchuk $\left(\lim_{\nu \to +\infty} \frac{\frac{d\sigma_0}{dt}(\nu, t)}{\frac{d\sigma_-(\nu, t)}{dt}} = 0 \right)$ implique que la limite du deuxième membre de l'équation (9.5) doit s'annuler. Si $\lim_{\nu \to +\infty} P_-(\nu, t) = +1$, la même règle implique l'annulation de cette limite pour $\tau_1 = -1/2$ et réciproquement.

CHAPITRE X

QUELQUES TECHNIQUES D'EXTRAPOLATION ANALYTIQUE

10 - A - METHODES POUR OBTENIR LA CONTRIBUTION DE LA REGION NON PHYSIQUE ET LES ZEROS COMPLEXES

Même si les chapitres 5 à 9 présentent quelques méthodes pour calculer les zéros complexes et la contribution de la région non-physique, nous allons étudier ici une nouvelle méthode pour les calculer qui est basée sur la connaissance approchée qu'on a des amplitudes aux régions de basse énergie, en termes de déphasages. Une vertu assez importante de cette méthode (qui manquait aux méthodes et formules données dans les chapitres 5, 7, 8 et 9) est l'unitarité élastique dont on va tenir compte d'une façon explicite et approchée.

Pour être capable de contrôler les erreurs et les instabilités dans le calcul, il est préférable d'utiliser les techniques d'extrapolation analytique (36). Dans la suite, nous étudierons avec un certain détail les différentes étapes du calcul des amplitudes $T_-(\nu, t)$ au moyen des extrapolations analytiques. Nous répétons que notre but est de trouver $|T_-(\nu, t)|$ sur la région physique ainsi que les zéros complexes.

lère étape :

Nous allons prendre un ensemble de N' valeurs numériques approchées pour les ondes partielles πN, avec un moment angulaire orbital petit (S, P, D, F, G) pour chaque isospin total I = 1/2, 3/2 dans un intervalle $M+\mu \leq \sqrt{s} \leq \sqrt{s}_{max}$ ($s_{max} \simeq 2$ Gev)(37). Puis, nous considérerons les domaines $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_u$ limités à gauche et à droite par les lignes $s = s_{max}$, $\nu = \nu_0$, $u = s_{max}$, $\nu = -\nu_0$ et par les lignes $t = 0$, $t_{min} = -\dfrac{\lambda(s_{crit}, M^2, \mu^2)}{s_{crit}}$, $s_{crit} < s_{max}$ (la valeur s_{crit} sera définie plus tard). Les intersections de la ligne t = constant dans $0 \geq t > t_{min}$ avec $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_u$, les régions physiques infinies des voies s et u et la région non-physique finie seront appelées $\Delta_s(t)$, $\Delta_u(t)$, $\Delta'_s(t)$, $\Delta'_u(t)$ et $\Delta(t)$ (voir la figure 5). Alors, en utilisant l'équation (4. A. 5) et les équations qui relient A_- et B_- aux ondes partielles πN dans le système barycentrique (25), (26), on parvient à connaître les valeurs numériques approchées de $T_-(\nu, t)$ dans N' lignes contenues à l'intérieur de $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_u$, parallèles respectivement à PQ et RS.

Soit N'(t) le nombre des lignes parallèles à PQ ou RS contenues dans $\mathcal{D}_s$ ou $\mathcal{D}_u$ et qui croisent la ligne t = constante pour $0 \geq t > t_{min}$. Alors, N'(0) = N' , et N'(t) est une fonction qui décroît quand t décroît. On voit bien que les amplitud $T_-(\nu, t)$ qui sont ainsi obtenues, sont des solutions approchées des équations d'unitarité dans les régions élastiques des voies s et u. Il faut remarquer que les domaines $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_u$ peuvent être élargis et même contenir quelques région non-physiques si : a) $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_u$ sont contenus à l'intérieur des domaines de Lehmann et Martin (où le développement à ondes partielles est convergent), b) si un petit nombre d'ondes partielles (celles qui sont connues d'après l'analyse en déphasages) sont suffisantes pour donner une approximation raisonnable des amplitudes A_- et B_- à ces nouvelles régions non-physiques.

2ème étape :

Il sera convenable de définir pour t fixe et ν arbitraire :

$$\hat{T}_-(\nu,t) \equiv T_-(\nu,t) - T_-(\nu,t)_{pole} - \frac{1}{\pi}\int_{\Delta_s(t)+\Delta_u(t)} \frac{d\nu' \, \mathrm{Im}\, T_-(\nu',t)}{\nu'-\nu} \qquad (10.A.$$

$$T_-(\nu,t)_{pole} = \frac{-2\nu_B + i2\tau_1 \frac{C(\nu_B,t)}{2M}}{\left(1 - t/4M^2\right)^{1/2}} \cdot \frac{G_r^2}{2M} \cdot \frac{\mu}{\nu-\nu_B} \cdot \delta_{\tau_2,\tau_1} \qquad (10.A.$$

$\hat{T}_-(\nu, t)$ est analytique dans le plan complexe ν, à l'exception d'une ou deux coupures non-physiques finies (selon la valeur de t), dans l'intervalle $\Delta(t)$ et deux coupures physiques infinies $\Delta'_s(t)$ et $\Delta'_u(t)$. $\hat{T}_-(\nu, t)$ est réel et connu d'une façon approchée pour $\nu \in \Delta_s(t) + \Delta_u(t)$. Soit

$$\bar{\Delta}_s(t) = \left[\nu_0 + \eta, \frac{s_{max} - M^2 - \mu^2 + t/2}{2M} - \eta\right] \quad , \eta > 0$$

un intervalle plus petit et contenu dans $\Delta_s(t)$, qui contient en même temps les N'(t) points où l'on connaît les valeurs numériques de $\hat{T}_-(\nu, t)$. En faisant une transformation linéaire :

$$w = \frac{1}{\frac{s_{max} - M^2 - \mu^2 + t/2}{2M} - \nu_0 - 2\eta} \left(2\nu - \frac{s_{max} - M^2 - \mu^2 + t/2}{2M} - \nu_0\right) \qquad (10.A.$$

le plan complexe ν est transformé dans un nouveau plan complexe w, de telle façon que :

i) l'intervalle $\bar{\Delta}_s(t)$ se transforme en intervalle $[-1, +i]$ dans le plan complexe w
ii) l'intervalle $\bar{\Delta}_s(t)$ se transforme en intervalle $(+1/K, -1/K)$ dans le plan complexe w,

$$\left(K = 1 - \frac{2\eta}{\frac{s_{max} - M^2 - \mu^2 - t/2}{2M} - \nu_0}\ ,\ 0 < K < 1\right)$$

. Alors, nous connaissons les valeurs numériques de $\hat{T}_-(w,t) \equiv \hat{T}_-(\nu,t)$ dans N(t) points contenus dans l'intervalle : $-1 < w < +1$ et nous pouvons essayer de faire une extrapolation de $\hat{T}_-(w,t)$ à partir de cet intervalle jusqu'à la région de l'axe réel w qui correspond à l'intervalle $\Delta(t)$ (et même jusqu'à une région quelconque du plan complexe w), au moyen des développements approchés en termes de pôlynomes de Cutkosky, Deo et Ciulli (36). Tous ces développements en polynômes ont les propriétés suivantes :

1) Leurs coefficients peuvent être calculés d'une manière convenable à partir des valeurs connues de $\hat{T}_-(w,t)$ dans les N(t) points à $-1 < w < +1$.
2) Ils sont stables dans le sens que si les erreurs dans les valeurs numériques de $\hat{T}_-(w,t)$, en $-1 < w < +1$, deviennent plus petites (ou même s'annulent), alors les erreurs dans les valeurs extrapolées de $\hat{T}_-(w,t)$ sur quelques régions du plan complexe w (même dans les coupures) deviennent aussi plus petites (ou même s'annulent). C'est-à-dire qu'on peut avoir un contrôle sur les instabilités.
3) Ils sont optimisés, au sens que ces différents développements ont le nombre le plus petit de termes et le degré de convergence le plus grand, lorsque certaines conditions ont été imposées.

Nous ne donnerons plus de détails car les travaux de Cutkosky, Deo et Ciulli peuvent être appliqués directement.

Il est assez convenable que N(t)' soit grand, ce qui serait assuré si $N(t_{min})'$ (le nombre d'énergies entre s_{crit} et s_{max} pour lesquelles les ondes partielles sont connues) est aussi grand. Par exemple, si $N(t_{min})' \simeq 50$, alors $s_{crit} \simeq M + 2\mu \simeq 1.2$ GeV et, donc, $t_{min} \simeq -9.2\mu^2$. D'une façon identique, $N(t_{min})' \simeq 20$ implique $t_{min} \simeq -55\mu^2$. Donc, en utilisant un de ces développements approchés en polynômes, $T_-(\nu,t)$ peut être extrapolée à partir de $\Delta_s(t)$ jusqu'à une région quelconque du plan complexe ν. Alors, on voit bien que :

4) Il est possible de faire une comparaison des valeurs de $T_-(\nu,t)$ extrapolées jusqu'à l'intervalle $\Delta_u(t)$ déjà obtenues dans la première étape, lesquelles n'ont pas été utilisées dans l'extrapolation dont nous avons parlé. Cette comparaison impose une condition de consistance assez forte, et peut être, en principe, un moyen assez utile pour résoudre quelques ambiguïtés dans l'analyse en déphasages. Cette consistance n'est que la conséquence des restrictions impliquées par l'analyticité, l'unitarité et le croisement.

b) Si on arrive à achever cette consistance, alors on peut avoir assez de confiance dans les valeurs de $T_-(\nu, t)$ extrapolées jusqu'à l'intervalle $\Delta(t)$, qui est plus proche à $\Delta_s(t)$ que $\Delta_u(t)$ (nous pouvons faire aussi, par exemple, une comparaison entre les valeurs extrapolées de $T_-(\nu, t)$ dans $\Delta(t)$ et les prédictions de quelques modèles d'algèbres de courant).

c) Nous pouvons chercher les zéros complexes de $T_-(\nu, t)$ comme $\nu_1(t)$, $\nu_1(t)^*$. Ces zéros changent de position à partir de ces positions pour $t = 0$, quand $|t|$ augmente.

Il nous semble raisonnable de prévoir que ces polynômes, une fois l'extrapolation faite, donneront une bonne description de $T_-(\nu, t)$ dans $\Delta(t)$ et des zéros complexes, quand $-t$ n'est pas trop grand.

3ème étape :

Même si nous avons présenté, dans la 2ème étape, une méthode approchée pour trouver les zéros complexes de $T_-(\nu, t)$ dans le plan complexe ν pour t fixe, nous allons étudier ici une nouvelle méthode pour les chercher.

Pour $0 \geq t > \mu^2 - 2\mu M$, au moyen de la transformation conforme :

$$\eta = \exp(i\varphi)\,\frac{\sqrt{\nu-(\mu+t/4M)}\,\sqrt{\nu'_1+(\mu+t/4M)}-\sqrt{\nu+(\mu+t/4M)}\,\sqrt{\nu'_1-(\mu+t/4M)}}{\sqrt{\nu-(\mu+t/4M)}\,\sqrt{\nu'_1+(\mu+t/4M)}+\sqrt{\nu+(\mu+t/4M)}\,\sqrt{\nu'_1-(\mu+t/4M)}} \qquad (10.A.4$$

Nous allons transformer le plan complexe ν sur l'intérieur du cercle de rayon unité, dans le plan complexe η, de telle façon que les deux coupures correspondant aux voies s et u se transformeront dans le cercle unité $|\eta| = 1$. Le symbole ν'_1 représente un point arbitraire dans le demi plan supérieur (Im $\nu > 0$) qui est voisin du ν_1, le zéro vers l'avant ($\nu_1 \simeq (0.132 + i\,0.0934)$ GeV). Il est bien évident que ν'_1 se transforme sur le point $\eta = 0$. On supposera que l'extrapolation qui a été faite dans la 2ème étape nous a donné déjà des valeurs assez raisonnables pour $T_-(\nu, t)$ dans $\Delta(t)$ (de toute façon, pour $t = 0$, les valeurs de $T_-(\nu)$ dans $-\mu < \nu < \mu$ peuvent être trouvées aussi à partir des relations de dispersion vers l'avant). En choisissant d'une manière convenable la phase φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), on peut arranger la transformation conforme de telle sorte que l'intervalle $\Delta_s(t)+\Delta(t)+\Delta_u(t)$ (où $T_-(\nu, t)$ est connue approximativement), soit transformé sur un intervalle circulaire, L, dans le cercle de rayon unité ($|\eta| = 1$), placé symétriquement par rapport à l'axe réel positif du plan complexe η.

Alors, en utilisant la technique générale de Pisut et Presnajder (38) on eut donner l'expression approchée suivante pour $\tilde{T}_-(\eta, t)$ ($\equiv T_-(\nu, t)$) dans le point = 0 :

$$\tilde{T}_-(\eta=0,t) \simeq \tilde{T}_-(\eta=0,t)_{pôle} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L,|\eta|=1} \frac{d\eta}{\eta}\, \tilde{T}(\eta,t)\exp\left[\sigma_0 P_0(\eta)\right] \qquad (10.A.5)$$

$$\sigma_0 = \frac{\pi-\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{\epsilon} \quad , \quad P_0(\eta) = \frac{i}{\pi-\alpha}\ln\left[\frac{1-\eta e^{i\alpha}}{1-\eta e^{-i\alpha}}\right] \qquad (10.A.6)$$

$_-(\eta, t)_{pôle}$ étant l'amplitude obtenue si on fait la transformation (10.A.4) dans équation (10.A.2). Les constantes α et ϵ sont la moitié de l'amplitude angulaire e l'arc L et une estimation de l'erreur numérique de $\tilde{T}_-(\eta, t)$ dans L, respecti-ement.

Pisut et Presnajder (38) ont montré, en général, qu'une expression omme celle donnée dans l'équation (10.A.5) est une approximation optimisée t stabilisée pour la "véritable" amplitude $\tilde{T}_-(\eta = 0, t)$ et ils ont donné plus de étails sur ϵ et sur l'erreur que l'équation (10.A.5) implique. Etant donné ue $\tilde{T}_-(\eta = 0, t) = 0$ si $\nu'_1 = \nu_1(t)$, on déduit que le zéro $\nu_1(t)$ peut être trouvé out au moins, en principe) en cherchant le minimum du module au carré de $_-(\eta = 0, t)$ quand on fait varier ν'_1 dans une région voisine de ν_1 (=(0.132+i 0.0934) eV).

La même technique peut être utilisée quand :

Les valeurs de $T_-(\nu, t)$ dans $\Delta(t)$ ne sont pas connues,

) $t \leqslant \mu^2 - 2\mu M$, de telle sorte que le pôle correspondant au nucléon est contenu ans l'intégrale,

i) $t \leqslant -4\mu M$, de telle façon qu'il faut considérer la transformation conforme $= e^{i\varphi}\ \frac{\nu - \nu'_1}{\nu - \nu'^*_1}$, $0 \leq \varphi \leqslant 2\pi$ (et non plus l'équation [10.A4]), le pôle correspondant u nucléon étant contenu aussi dans l'intégrale.

Pour s'assurer qu'il n'y a pas de nouveaux zéros ou bien pour les hercher dans le cas où ils sont apparus, il faut que le point ν'_1 balaye le demi-lan supérieur du plan complexe ν (et, en particulier, les régions non-physiques oisines des coupures, où les nouveaux zéros possibles peuvent être trouvés) et, ain-, voir les valeurs correspondantes de $\tilde{T}_-(\eta = 0, t)$.

La confiance que nous donnons aux valeurs des zéros complexes qui peuvent être trouvés par nos méthodes, est fondée sur une hypothèse implicite: à savoir que ces zéros seront placés dans les régions à basse énergie, dans le plan complexe ν (tout au moins, quand $|t|$ n'est pas trop grand). Cette hypothès est justifiée par la valeur numérique du zéro trouvé par Jorna et Mc Clure (12), ainsi que les hypothèses de non-oscillation faites dans la section 4. B, et quelqu arguments à retard d'un groupe d'ondes (pareils à l'argument présenté vers la fin du chapitre 3).

Alors, lorsque de bonnes valeurs pour $|T_-(\nu, t)|$ ont été obtenues dans la région non-physique et de même les zéros complexes, on peut utiliser les représentations de module données aux équations (4. B. 3) et (4. B. 5) pour trouver arg $T_-(\nu + i\epsilon, t)$ d'une façon unique à partir des sections efficaces différe tielles et des polarisations.

On peut faire une étude identique pour $\bar{p}\, p \to \pi^+ \pi^-$ et pour le cas non-relativiste.

0 - B - EXTRAPOLATIONS AUX REGIONS PHYSIQUES

Les polynômes optimisés que nous avons considéré dans la section 0.A. peuvent donner plus d'information car, s'ils ont été construits, ils propor-onnent des valeurs approchées pour $T_-(\nu, t)$, pour ν arbitraire, même dans $\Delta'_s(t) + \Delta'_u(t)$, de telle façon qu'on a une nouvelle méthode pour trouver $T_-(\nu, t)$ ui est différente de celle qui consiste à introduire des données expérimentales ans la représentation de module, comme nous l'avons dit à la fin de la section 0.A). Pour "tester" ces nouvelles extrapolations, nous pouvons voir si les va-eurs extrapolées pour $T_-(\nu, t)$ sont consistantes avec les valeurs expérimentales voir l'équation (4.A.8)) de $T_-(\nu, t)$ pour toutes les $\nu = \nu_{exp}$ sur $\Delta'_s(t)$, pour esquelles on a des données. Si on a une consistance, alors on a des prédictions aisonnables pour $T_-(\nu, t)$ (donc, pour $\frac{d\sigma_-}{dt}$ et P_-) pour toutes les valeurs de ν ontenues entre l'extrémité droite de $\Delta_s(t)$ et ν_{exp}. On peut espérer que les extra-olations de ces polynômes jusqu'aux régions lointaines de $\Delta'_s(t)$ seront moins onnes" que celles jusqu'à $\Delta(t)$.

Quand on connaît $T_-(\nu, t)$ sur la région non-physique et les zéros omplexes d'une façon approximative, on peut essayer de faire de nouvelles xtrapolations à partir de $\Delta_s(t) + \Delta_u(t)$ jusqu'à $\Delta'_s(t) + \Delta'_u(t)$, comme suit (ces nou-elles méthodes seront complémentaires de celles que nous avons commentées i-dessus, et les valeurs de $T_-(\nu, t)$ données par des méthodes différentes devront tre comparées).

En rappelant a) les équations (4.B.3) et (4.B.5), b) le fait que le zéro $\nu_1(t)$ a été déterminé dans les deuxième et troisième étape, c) que les phases $\arg T_-(\mu + t/4M + i\epsilon, t)$ et $\arg T_-(c(t) + i\epsilon, t)$ si $c(t) \in \Delta_s(t)$ et $t_{min} < t < -4\mu M$ peuvent tre fixées par convention, alors, on voit que la fonction $(\tau_1 = \tau_2)$:

$$t) \equiv \begin{cases} \ln\left\{\dfrac{T_-(\nu, t)}{D(\nu, t)}\right\} & , \quad D(\nu, t) \text{ contenant le pôle du nucléon, pour } 0 \geq t > -2\mu M + \mu^2 \\ \ln\left\{\dfrac{T_-(\nu, t)}{D(\nu, t)}\right\} & , \quad D(\nu, t) \text{ ne contenant plus le pôle du nucléon, pour } -2\mu M + \mu^2 > t > -4\mu M \\ \left\{\dfrac{T_-(\nu, t)\left[\nu - \nu_1(t)^*\right]}{\nu - \nu_1(t)}\right\} - i \arg T_-\left[c(t) + i\epsilon, t\right] + i \operatorname{arc\,tg}\left[\dfrac{\operatorname{Im} \nu_1(t)}{c(t) - \operatorname{Re}\nu_1(t)}\right] & \\ \text{pour } -4\mu M > t & \end{cases} \qquad (10.B.1)$$

est, pour t fixe et $0 \geq t$:

a) analytique dans le plan complexe ν_1 à l'exception des coupures réelles parei les à celles de $T_-(\nu, t)$; et elle n'a pas de pôle correspondant au nucléon ou d coupures pour $\nu = \nu_1(t)$, $\nu_1(t)$.*

b) telle que ses valeurs numériques sont connues dans $\Delta_s(t) + \Delta(t) + \Delta_u(t)$.

Pourtant les équations (10. B. 1) impliquent que Re $T_-(\nu, t)$ doit être égale à $\ln\left[16\pi\mu^2 q_L^2 \frac{d\sigma}{dt}(1+2\tau_1 P_-)\right]$ pour $\nu > \nu_0$ (ou a $\ln\left[16\pi\mu^2 q_L^2 \frac{d\sigma}{dt}(1-2\tau_1 P_+)\right]$ pour $\nu < -\nu_0$).

Donc, les valeurs numériques de Re $T_-(\nu, t)$ sont connues expérimentalement pour beaucoup de points dans $\Delta'_s(t) + \Delta'_u(t)$. On voit aussi que Im $R_-(\nu, t)$ est égale à arg $T_-(\nu + i\varepsilon, t)$ à une constante connue près, et que la relation de dispersion pour $R_-(\nu, t)$, en termes de Re $T_-(\nu, t)$ pour t fixe, n'est que le logarithme de la représentation de module pour $T_-(\nu, t)$ quand la contribution des zéros a été séparée.

En faisant une extrapolation de $R_-(\nu, t)$ à partir de $\Delta_s(t) + \Delta(t) + \Delta_u(t)$ jusqu'à $\Delta'_s(t) + \Delta'_u(t)$, au moyen des mêmes techniques que nous avons utilisée auparavant, dans le deuxième étape de la section 10. A. on obtient les nouvelles méthodes d'extrapolation.

En fait, les valeurs ainsi obtenues pour $R_-(\nu, t)$ peuvent être transformées très facilement au moyen de l'équation (10. B. 1), dans des valeurs pour $T_-(\nu, t)$ sur $\Delta'_s(t) + \Delta'_u(t)$. Le "test" de consistance pour les valeurs extrapolées de $R_-(\nu, t)$ sur $\Delta'_s(t) + \Delta'_u(t)$, est le même que celui de $T_-(\nu, t)$ dont nous avons parlé au début de cette section. L'extrapolation de $T_{(t)}(t, u)$ sur la région physique de la voie t peut être calculée d'une façon identique.

Remarques :

I - Cette analyse montre qu'il n'est plus nécessaire de faire la mesure des paramètres de Wolfenstein R et A (39) relatifs à la polarisation double dans la diffusion πN. Pourtant, leur connaissance expérimentale peut être convenable quelquefois, car cela nous donnera un moyen nouveau de faire un "test" des extrapolations analytiques fait auparavant.

I - Notez que lorsqu'un certain développement en polynômes optimisés nous permet de faire une bonne extrapolation à partir d'un intervalle A_1, jusqu'à un intervalle lointain A_3 (c'est-à-dire que les valeurs extrapolées sont consistantes avec les valeurs expérimentales), on peut alors être sûr qur les valeurs extrapolées sur une région A_2 entre A_1 et A_3 seront aussi bonnes. Donc, on peut commencer une nouvelle extrapolation à partir de $A_1+A_2+A_3$ jusqu'à de nouvelles régions A_4 en utilisant un nombre de valeurs initiales beaucoup plus grandes (tandis que l'extrapolation à partir de A_1, jusqu'à A_4 serait sûrement moins raisonnable, car elle utilise moins de valeurs initiales).

III - Pour comprendre comment les zéros complexes bougent, pour pouvoir résoudre quelques ambiguïtés possibles et étudier ce qui se passe à quelques énergies "difficiles" où on a des solutions continues d'une manière incorrecte, ou une grande complexité expérimentale et, tout en rappelant l'analyse à lignes à phase constante (18), il nous semble convenable de dessiner :

i) les lignes à module constant pour $|T_-(\tau_2, \tau_1)|$ (c'est-à-dire les courbes où ce module a une valeur constante) dans les régions physiques des différentes voies ou même dans les plans complexes. Ceci peut être fait sans aucun calcul à partir des données expérimentales.

ii) les lignes à phase constante pour arg $T_-(\tau_2, \tau_1)$ dans les mêmes régions, une fois le calcul fait.

La représentation graphique de Re $T_-(\tau_2, \tau_1)$ vers Im $T_-(\tau_2\, \tau_1)$, qui est une généralisation directe d'une représentation pour l'amplitude vers l'avant étudiée par Höhler et Ebel (1) peut être aussi intéressant.

V - On peut essayer de faire une extrapolation analytique à haute énergie de la matrice S pour la diffusion πN avec des valeurs définies de l'isospin total et du moment angulaire orbital et total, $S^1_{\ell\pm}(s)$ $(= \eta^1_{\ell\pm} \exp 2i\delta^1_{\ell\pm})$, dont la structure analytique dans le plan complexe s est bien connue à partir de la représentation de Mandelstam (40). Notez que les valeurs numériques de $\eta^1_{\ell\pm}(s)$ et $\delta^1_{\ell\pm}(s)$ sont connues pour les ondes partielles les plus basses (S, P, D, F, G, H) dans un certain intervalle physique de la variable s (37) et que les contributions des régions non-physiques à ces ondes partielles dans ces régions physiques sont aussi bien

connues (4), (5). Le problème que pose une extrapolation analytique des $S^{I}_{\ell\pm}(s)$ à haute s est la difficulté de comparer les valeurs extrapolées avec les valeurs "exactes". En fait, pour faire une telle comparaison, on devrait tenir compte d'un nombre élevé d'ondes partielles (ce nombre d'ondes partielles à considére devenant plus grand quand s devient plus grand), il faudrait alors sommer tout ces ondes partielles pour obtenir une amplitude approchée et comparer finalem avec les données expérimentales. On comprend bien, que la source des difficul n'est que les ondes partielles au moment angulaire le plus grand, lesquelles so mal connues ou complètement inconnues, et dont l'importance devient plus gra de quand s augmente. Donc, on risque d'avoir de grandes ambiguïtés. Il nous semble alors convenable et raisonnable de ne plus se limiter à faire une extrap lation des ondes partielles vers les régions à haute énergie, mais de considére (et même de se concentrer) l'extrapolation des amplitudes "complètes" pour t fixe dans le plan complexe ν (ou pour u fixe dans le plan complexe t, comme n l'avons indiqué), car il est toujours possible de faire une comparaison entre le valeurs expérimentales et extrapolées des modules des amplitudes.

V - Etant donné que l'unitarité implique que les combinaisons $E^{\pm}(s,t,u) = A^{\pm}_{+\nu}$ devront satisfaire pour $0 \geq t > -\infty$, $\nu \geq \nu_0$ les conditions de positivité (41) :

$$\left(\frac{\partial^n \operatorname{Im} E^{\pm}(s,t,u)}{\partial t^n}\right)_{t<0} \leq \left(\frac{\partial^n \operatorname{Im} E^{\pm}(s,t,u)}{\partial t^n}\right)_{t=0} \qquad (10.B.$$

on comprend bien que depuis qu'on a calculé $\arg T_{-}(\nu,t)$ (soit par extrapolation soit en utilisant des données expérimentales dans la représentation de module), il faut étudier si les valeurs résultant de $T_{-}(\nu t)$ sont telles que les $E^{\pm}(s,t,u)$ correspondantes satisfont l'inégalité ci-dessus.

CHAPITRE XI

LA DIFFUSION NUCLEON-NUCLEON

Nous allons seulement donner les formules et les propriétés les plus spécifiques et nous omettrons de répéter des questions déjà posées en relation avec la diffusion π N

La voie s est $N_1(p_1, \tau_1)+N_2(p_2, \tau_2) \rightarrow N'_1(p'_1, \tau'_1)+N'_2(p''_2, \tau'_2)$, les N's représentant soit des protons, soit des neutrons, et les p's et τ's étant les tétravecteurs impulsions et les projections du spin. Les voies t et u correspondront aux diffusions nucléon-antinucléon. Les invariantes cinématiques sont $s = -(p_1+p_2)^2$, $t= -(p_1-p'_2)^2$, $u=-(p_1-p'_2)^2$ avec $s+t+u = 4M^2$ (M étant la masse du nucléon). L'amplitude de diffusion sur la voie s a la forme générale suivante (42

$$T(\tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^{5} A_i(s,t,u) \cdot X_i \qquad (11.1.a$$

$$X_i = \left[\bar{u}(p'_2, \tau'_2)\, O_i\, u(p_2, \tau_2)\right]\left[\bar{u}(p'_1, \tau'_1)\, O_i\, u(p_1, \tau_1)\right], \quad i = 1, \ldots 5 \qquad (11.1.b$$

$$O_1 = \mathbb{1}, \quad O_2 = \gamma_5, \quad O_3 = \gamma_\mu, \quad O_4 = i\gamma_5\gamma_\mu, \quad O_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{\mu\nu}$$

Les u's et les γ's sont des spineurs et des matrices de Dirac. D'autre part, les A_i's sont des amplitudes invariantes. Nous sommes intéressés à choisir le repère et les transversités (et, alors, T) de telle façon que : i) il soit possible d'exprimer les grandeurs observables (comme par exemple la section efficace différentielle non polarisée, $\frac{d\sigma}{dt}$, et les paramètres de polarisation, Q_{xy}) sous forme d'une somme des différentes $|T|^2$, sans termes d'interférence, ii) les relations de croisement pour les amplitudes T doivent avoir la plus grande simplicité.

Pour des nucléons entrant non-polarisés, une grandeur Q_{xy} quelconque a la forme suivante (voir (43), (44), (45) pour avoir plus de détails) :

$$Q_{xy} \cdot 64\pi s(s-4M^2)\frac{d\sigma}{dt} = Tr\left\{T X T^+ Y\right\} =$$

$$= \sum_{\substack{\tau_1, \tau_2, \tau'_1, \tau'_2, \\ \tau''_1, \tau''_2, \tau'''_1, \tau'''_2}} T(\tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2) \langle \tau_1 \tau_2 | X | \tau''_1 \tau''_2 \rangle T(\tau'''_1, \tau'''_2, \tau''_1, \tau''_2) \langle \tau'''_1 \tau'''_2 | Y | \tau'_1 \tau'_2 \rangle \qquad (11.2)$$

$\langle \tau_1 \tau_2 | X | \tau''_1 \tau''_2 \rangle$ étant l'élément de matrice de l'opérateur X relatif aux spins des nucléons, calculé entre les états de spin $|\tau_1 \tau_2\rangle$ et $|\tau''_1 \tau''_2\rangle$ pour les deux nucléons, etc.

Il faut souligner que l'équation (11.2) est aussi valable pour X=Y=1, $_{xy}$ =1.

Il est clair que la condition i) peut être réalisée si nous choisissons s τ's et 4 paires d'opérateurs X, Y de telle forme qu'on ait : $\langle \tau_1 \tau_2 | X | \tau''_1 \tau''_2 \rangle = 0$ uf si $\tau_1 = \tau''_1$, $\tau_2 = \tau''_2$ et $\langle \tau'''_1 \tau'''_2 | Y | \tau'_1 \tau'_2 \rangle = 0$ sauf si $\tau'''_1 = \tau'_1$, $\tau'''_2 = \tau'_2$.

Nous rappellerons que les techniques modernes pour produire et mesurer les polarisations sont aujourd'hui capables de faire, avec une précision isonnable, la mesure de la polarisation P du nucléon diffusé ou de recul $= Q_{xy}$ pour X = 1, Y = $\bar{\sigma}_1 . \bar{n}$, $\bar{n} = \frac{\bar{P}_1 \wedge \bar{P}_2}{|\bar{P}_1 \wedge \bar{P}_2|}$ étant le vecteur à module unité normal plan de la diffusion dans le repère du laboratoire ou baricentrique). Les mêmes chniques peuvent aussi mesurer, mais avec moins de précision, la "composante rmale" C_{nn} du tenseur de corrélation de spin ($C_{nn} = Q_{xy}$ pour X=1, Y=$(\bar{\sigma}_1 . \bar{n})(\bar{\sigma}_1 . \bar{n})$) "composante normale" D_{nn} du tenseur de dépolarisation ($D_{nn}=Q_{xy}$ pour $\bar{\sigma}_1 . \bar{n}$, Y = $\bar{\sigma}_1 . \bar{n}$) et quelques autres (R, A, etc...) (46) pour lesquelles nous serons plus intéressés. Alors, la condition i) peut être réalisée si nous oisissons a) les 4 grandeurs Q_{xy} égales à P, C_{nn}, D_{nn} et "la composante normale" K_{nn} du tenseur à transfert de polarisation ($K_{nn}=Q_{xy}$ pour X = $\bar{\sigma}_1 . \bar{n}$, $= \bar{\sigma}_2 . \bar{n}$) b) les τ's égales aux transversités, c'est-à-dire aux projections des ins selon la normale $\bar{n}$.

D'autre part, pour réaliser la condition ii) le plus simple est de nous acer toujours au repère du laboratoire, dans lequel le nucléon N_1 est au repos $_1$ = 0). Donc, en faisant des croisements convenables avec N_2, N'_1 et N'_2, on ut arriver à toutes les configurations cinématiques possibles sur les voies t et Dans un moment donné, il sera aussi convenable de factoriser quelque fonction cinématique N (voir l'équation (11.12). En faisant un résumé, il nous semble e le chemin le plus simple est l'utilisation des amplitudes de transversité dans repère du laboratoire, $T(\tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2)$ (le facteur N sera séparé un peu plus rd). Ces amplitudes peuvent être obtenues à partir de l'équation (11.1a) et des uvelles expressions suivantes pour les grandeurs X_i dans le laboratoire, les s étant maintenant des transversités (les détails du calcul, qui est très long, nt omis) :

$$\frac{X_1}{N} = \delta_{\tau'_1 \tau_1} \delta_{\tau'_2 \tau_2} \frac{4M^2}{4M^2 - U} \left(1 + i 2 \tau_2 \frac{C}{S} \right) \qquad (11.3)$$

$$\frac{X_2}{N} = \delta_{-\tau_1'\tau_1}\delta_{-\tau_2'\tau_2}\frac{1}{4M^2-t}\left\{\left[t - \frac{su}{4M^2-u} + \frac{u(2\tau_1 2\tau_2 4M^2 t - su)}{(4M^2-u)(s-4M^2)}\right] + \right.$$

$$\left. + iC\,4M^2\left[\frac{2\tau_1}{s} + \frac{2\tau_2}{4M^2-u} + \frac{(2\tau_1+2\tau_2)u}{(4M^2-u)(s-4M^2)}\right]\right\} \qquad (11.4)$$

$$\frac{X_3}{N} = \delta_{\tau_1'\tau_1}\delta_{\tau_2'\tau_2}\left[1 + \frac{u}{u-4M^2} + \frac{2t}{4M^2-t} + (2\tau_1 2\tau_2 - 1)\frac{t}{4M^2-t}\cdot\frac{u}{4M^2-u}\right] +$$

$$+ \delta_{-\tau_1'\tau_1}\delta_{-\tau_2'\tau_2}\frac{1}{4M^2-t}\left[(1-2\tau_1 2\tau_2)\frac{4M^2 t}{4M^2-u} - t + \frac{su}{4M^2-u} + 2\tau_1 2\tau_2 u + \right.$$

$$\left. + (1+2\tau_1 2\tau_2)\frac{su^2}{(4M^2-u)(s-4M^2)}\right] + iC\left\{\delta_{\tau_1'\tau_1}\delta_{\tau_2'\tau_2}\left[-2\tau_2\frac{4M^2}{s(4M^2-u)} - \right.\right.$$

$$\left. - 4\tau_1\frac{4M^2}{s(4M^2-t)} + (2\tau_1 - 2\tau_2)\frac{4M^2}{4M^2-t}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{4M^2-u}\right)\right] - \delta_{-\tau_1'\tau_1}\delta_{-\tau_2'\tau_2}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{4M^2}{4M^2-t}\left[\frac{2\tau_1}{4M^2-u} + \frac{2\tau_2}{s} + (2\tau_1+2\tau_2)\frac{u}{(4M^2-u)(s-4M^2)}\right]\right\} \qquad (11.5)$$

$$\frac{X_4}{N} = \delta_{\tau_1'\tau_1}\delta_{\tau_2'\tau_2}2\tau_1 2\tau_2\frac{4M^2}{4M^2-u} + \delta_{-\tau_1'\tau_1}\delta_{-\tau_2'\tau_2}\left\{1 - \frac{u}{4M^2-u} + \frac{t}{4M^2-t} + \right.$$

$$+ \frac{stu}{(4M^2-u)(4M^2-t)(4M^2-s)} + 2\tau_1 2\tau_2\left[-\frac{4M^2}{4M^2-u} + \frac{u}{4M^2-t} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{su^2}{(4M^2-u)(4M^2-u)(4M^2-s)}\right]\right\} + iC\left\{\delta_{\tau_1'\tau_1}\delta_{\tau_2'\tau_2}2\tau_1\frac{4M^2}{s(4M^2-u)} + \right.$$

$$+ \delta_{-\tau_1'\tau_1}\delta_{-\tau_2'\tau_2}\left[(2\tau_1+2\tau_2)\frac{4M^2}{4M^2-u}\left(\frac{1}{s} + \frac{u}{(4M^2-t)(4M^2-s)} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{4M^2}{4M^2-t}\left(\frac{2\tau_1}{s} - \frac{2\tau_2}{4M^2-u}\right)\right]\right\} \qquad (11.6)$$

$$\frac{X_5}{N} = \frac{3}{2}\cdot\frac{X_1}{N} + \delta_{\tau_1'\tau_1}\delta_{\tau_2'\tau_2}\left[-\frac{1}{2}\left(3 - 2.2\tau_1.2\tau_2\right) + \frac{2t}{4M^2-t} + \right.$$

$$\left. + \left(3 + 2.2\tau_1 2\tau_2\right)\frac{2U}{4M^2-U} + \left(1 - 2\tau_1 2\tau_2\right)\frac{t}{4M^2-t}\left(\frac{U}{4M^2-U} - 1\right)\right] +$$

$$+ \delta_{-\tau_1'\tau_1}\delta_{-\tau_2'\tau_2}\left\{\left(1 - 2\tau_1 2\tau_2\right)\left(1 + \frac{2U}{4M^2-U}\right) - \frac{4U}{4M^2-U} + \right.$$

$$+\left(2\tau_1 2\tau_2 - 1\right)\frac{t}{4M^2-t}\left(\frac{U}{4M^2-U} - 1\right) + \frac{S-4M^2}{4M^2-t} - \frac{SU}{4M^2-t}\left(\frac{1}{4M^2-U} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{S}\right) - 2\tau_1 2\tau_2\frac{U}{4M^2-t} + \left(1 + 2\tau_1 2\tau_2\right)\frac{SU^2}{(4M^2-t)(4M^2-U)(4M^2-S)}\right\} +$$

$$+ i\,C\left\{\delta_{\tau_1'\tau_1}\delta_{\tau_2'\tau_2}\left[-2\tau_1\frac{8M^2}{S(4M^2-t)} + \left(6\tau_2 + 4\tau_1\right)\frac{12M^2}{S(4M^2-U)} + \right.\right.$$

$$\left.+\left(2\tau_1 - 2\tau_2\right)\frac{4M^2}{4M^2-t}\left(\frac{1}{4M^2-U} + \frac{1}{S}\right)\right] + \delta_{-\tau_1'\tau_1}\delta_{-\tau_2'\tau_2}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(2\tau_1 + 2\tau_2\right)\frac{8M^2}{S(4M^2-U)} + 2\tau_1\frac{4M^2}{(4M^2-t)(4M^2-U)} - 2\tau_2\frac{4M^2}{S(4M^2-t)} + \right.$$

$$\left.\left. + \left(2\tau_1 + 2\tau_2\right)\frac{4M^2U}{(4M^2-t)(4M^2-U)(S-4M^2)}\right]\right\} \qquad (11.7)$$

$$N = \frac{\left[S(4M^2-t)(4M^2-U)\right]^{1/2}}{(2M)^3} \qquad (11.8a)$$

$$C = |\bar{P}_2 \wedge \bar{P}'_2| = \frac{(stu)^{1/2}}{2M} \qquad (11.8b)$$

Ces formules montrent qu'il y a seulement 5 amplitudes de transversi indépendantes, que nous choisirons comme suit : $T(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, $T(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $T(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $T(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +$ et $T(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

En utilisant l'équation (11.3) les modules au carré des amplitudes indépendantes peuvent être exprimés en fonction des grandeurs observables $\frac{d\sigma}{dt}$, P, C_{nn}, D_{nn} et K_{nn} :

$$\left|T(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})\right|^2 = 8\pi s(s-4M^2)\frac{d\sigma}{dt}\left[1 + 4P + C_{nn} + K_{nn} + D_{nn}\right]$$

$$\left|T(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\right|^2 = 8\pi s(s-4M^2)\frac{d\sigma}{dt}\left[1 - 4P + C_{nn} + K_{nn} + D_{nn}\right]$$

$$\left|T(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\right|^2 = 8\pi s(s-4M^2)\frac{d\sigma}{dt}\left[1 + C_{nn} - K_{nn} - D_{nn}\right]$$

$$\left|T(+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})\right|^2 = 8\pi s(s-4M^2)\frac{d\sigma}{dt}\left[1 - C_{nn} + K_{nn} - D_{nn}\right] \qquad (11.9)$$

$$\left|T(+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})\right|^2 = 8\pi s(s-4M^2)\frac{d\sigma}{dt}\left[1 - C_{nn} - K_{nn} + D_{nn}\right]$$

Ces équations montrent que, pour le cas d'une diffusion vers l'avant (t=0) il y a trois amplitudes indépendantes, car :

$$T(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}) = T(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \quad , P = 0 \qquad (11.10)$$

$$T(+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}) - T(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) =$$

$$= T(+\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}) - T(+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) \qquad (11.11)$$

A partir des équations (11. 1a), (11. 3-9) on peut généraliser l'analyse faite dans la diffusion πN pour ce cas-ci. Comme nous l'avons déjà dit, il vaut mieux ne pas utiliser les amplitudes $T(\tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2)$ mais les nouvelles amplitudes

$$T_1(\tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{T(\tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2)}{N} \qquad (11.12)$$

Les singularités cinématiques et les propriétés d'analyticité des amplitudes $T_1(\tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2)$ sont faciles à étudier. En effet, son étude consiste à faire une comparaison entre les équations (11. 1 a, b) et les équations (2. 3-6) de la référence (47), et à exprimer les amplitudes invariantes A_i en fonction des amplitudes F_i de la référence (47) qui n'ont plus de singularités cinématiques mais seulement dynamiques. Ainsi, on peut en déduire que les amplitudes A_i n'ont que des singularités dynamiques, donc, que les seules singularités cinématiques existantes sont contenues dans les expressions pour X_i (voir les équations (11. 3) à (11. 8b)). Nous définissons les coupures de la fonction $C = \frac{(-t)^{1/2}}{2M}\left[s(s+t-4M^2)\right]^{1/2}$ dans le plan complexe s, à chaque t fixe dans l'intervalle $0 \geqslant t$, comme il est montré dans la figure 2, et nous supposons que les amplitudes invariantes F_i de la référence (47) ont des propriétés d'analyticité dans la variable s impliquées par des relations de dispersion qui peuvent être vues dans l'équation (3. 7) de la référence (47).

Alors, il n'existe aucune difficulté pour déduire les propriétés suivantes de $T_1(s, t, \tau'_1, \tau'_2, \tau_1, \tau_2)$, t étant fixe pour une valeur non-positive :

a) elle est analytique dans le plan complexe s, à l'exception des pôles cinématiques pour s = 0, s=-t et $s=4M^2$, des pôles dynamiques correspondant aux mésons π, η et au deutéron (dans le cas de la diffusion proton-neutron) et des deux coupures réelles : $-\infty < s \leqslant 4M^2 - 4\mu^2 - t$ et $4M^2 \leqslant s < +\infty$ (chaque coupure étant une superposition d'une coupure dynamique et d'une coupure purement cinématique procédant de la fonction cinématique C),

b) pour Re $s \geqslant 4M^2 - t$, Im $s = \epsilon \to 0^+$, cette fonction analytique devient l'amplitude physique de transversité au repère du laboratoire pour $N_1 N_2 \to N'_1 N'_2$ (à un facteur cinématique N près),

b) Pour Re $s \leqslant 0$, Im $s = -\epsilon$, $\epsilon \to 0^+$, elle devient l'amplitude physique de transversité pour la voie u (également à un facteur cinématique N près) $(\bar{N}'_2 N_1 \to \bar{N}_2 N'_1)$

dans le laboratoire, $T_1(u,t,\tau'_1,\tau'_2,\tau_1,\tau_2)_{(u)}$ d'après l'équation suivante :

$$T_1(Res-i\epsilon,t,\tau'_1,\tau'_2,\tau_1,\tau_2) = g(\tau'_1,\tau'_2,\tau_1,\tau_2)\, T_1(u+i\epsilon,t,-\tau'_1,\tau'_2,-\tau_1,\tau_2)_{(u)} \quad (11.13)$$

g étant un facteur de phase qui dépend des transversités et des facteurs de croisement d'isospin, mais qui est indépendant de s, t, u, car nous sommes placés toujours dans le repère du laboratoire. Il est convenable de souligner que :
i) nous avons choisi le vecteur normal de module unité pour $\bar{N}'_2 N_1 \rightarrow \bar{N}_2 N'_1$ dans la direction opposée à celui pour $N_1 N_2 \rightarrow N'_1 N'_2$
ii) les grandeurs observables pour $\bar{N}'_2 N_1 \rightarrow \bar{N}_2 N_1$ peuvent être exprimées en fonction de $T_1(\tau'_1,\tau'_2,\tau_1,\tau_2)_{(u)}$ en utilisant une équation identique à l'équation (11.2) mais ici dans la voie u.

Si on énonce, dans ce cas-ci, la diffusion nucléon-nucléon, les mêmes hypothèses a), b) c) énoncées dans la section 4.B pour la diffusion πN, tout en rappelant les représentations de module présentées aux sections 2.A et 2.B, et en utilisant les équations (11.1a) (11.3.9), les représentations de module pour $T_1(\tau'_1,\tau'_2,\tau_1,\tau_2)$ dans le plan complexe s peuvent être écrite immédiatement.

Etant donné que $T(\tau'_1,\tau'_2,\tau_1,\tau_2)$ n'est pas connu pour t =0 et $s=4(M^2-\mu^2)$, le théorème sur le nombre des zéros et pôles ne peut pas être appliqué ici pour connaître le nombre des zéros dans la diffusion vers l'avant, tout au moins pour le moment.

Etant donné que les généralisations de la représentation de phase sont très directes ainsi que les représentations de module superconvergentes, l'approximation à haute énergie, la règle de somme pour la diffusion vers l'avant, les restrictions et règles de somme provenant de la diffusion à échange de charge et les techniques d'extrapolation, nous n'avons alors plus besoin de les écrire explicitement en détail. La seule différence par rapport à la diffusion πN est l'existence, dans ce cas, d'une région non-physique finie additionnelle : $-t < s < 4M^2 - 4\mu^2 - t$, qui existe même pour t=0. Son existence empêche une extension directe de la méthode donnée dans la section 6 appliquée à ce cas, mais il est clair qu'il est toujours possible d'exprimer la contribution de cette région non-physique finie pour les représentations de module et de phase et les zéros complexes, lorsque t=0, en fonction des données expérimentales (en utilisant le théorème optique), comme auparavant.

Ayant fait remarquer d'une manière assez concise, comment les tech-
es présentée s pour πN pouvaient être généralisées au cas nucléon-nucléon,
s soulignerons que les mesures des paramètres K_{nn}, D_{nn} et C_{nn} comportent
ques difficultés techniques pour le moment, alors il sera difficile d'utiliser
eprésentation de module pour la diffusion nucléon-nucléon pour l'instant,
use de l'absence de données expérimentales. D'autre part, l'utilisation des
niques d'extrapolation analytique expliquées dans la section 10, appliquées
cas-ci, est peut-être moins difficile, avec les données expérimentales
n a maintenant.

De toute façon, étant donné que les techniques utilisées pour produire
esurer des particules polarisées se développent très rapidement, nous
vons prévoir que, dans un futur assez proche, il y aura des données expéri-
tales pour quelques Q_{xy} difficiles à mesurer jusqu'à présent. Nous espérons
c, que le contenu de ce chapitre présente quelques bonnes raisons sur
lité de mesurer K_{nn}, C_{nn} et D_{nn} pour différents angles et énergies. Nous
pelons que les interrelations entre C_{nn}, K_{nn} et D_{nn} dans les diffusions pp, pn,
n peuvent être consultées dans la référence (45).

Il peut être aussi utile de rappeler que la mesure du tenseur de trans-
de polarisation K_{ik}, qui a comme but l'élimination de quelques ambiguïtés
s la reconstruction de l'amplitude proton-proton, avait été suggérée par
umacher et Bethe (48). Ce que nous avons voulu faire remarquer ici, c'est
si la reconstruction de cette amplitude est faite au moyen de la représentation
nodule, il suffit de mesurer seulement les composantes normales de ce tenseur
es tenseurs de dépolarisation et de corrélation du spin.

2ème PARTIE

CHAPITRE XII

L'EQUATION INTEGRALE DE STIELTJES ET QUELQUES SOLUTIONS

Nous allons considérer l'équation intégrale suivante :

$$K(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx' U(x')}{x'-x} \qquad (12.1)$$

K(X) étant une fonction réelle connue dans l'intervalle $-\infty < X \leq 0$, et u(X) étant une fonction réelle aussi, mais inconnue qui va être déterminée. L'équation (12.1) (qui s'appelle équation de Stieltjes), est clairement non-singulière, car $X-X' \neq 0$. Une équation plus générale serait :

$$K(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{+A} \frac{dx' U(x')}{x'-x} + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{R_\ell}{x-x_\ell}, \quad \begin{matrix} x_0 \geq 0 \\ A \leq +\infty \\ x_0 < x_\ell < +\infty \end{matrix} \qquad (12.2)$$

qui se réduit formellement à l'équation (12.1), la fonction inconnue étant maintenant une distribution : $U_1(x') = U(x')\,\theta(A-x') + \pi \sum_{\ell=1}^{L} R_\ell \cdot \delta(x'-x_\ell)$.

Alors, on peut se limiter à étudier l'équation (12.1) seulement. Avec toute généralité, si K(X) est arbitraire, alors l'équation (12.1) n'a aucune solution (par exemple, si K(X) ou ses dérivées, ont une discontinuité). L'équation (12.1) a une solution seulement lorsque la fonction K(X) a accompli beaucoup de restrictions. En fait, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution u(X') est l'existence d'une fonction $\widetilde{K}(Z)$ réelle et analytique dans le plan complexe Z, avec une coupure réelle dans $X_0 < X \leq A$ ($\leq +\infty$) (et, peut-être, quelques pôles réels dans $X_0 < X < +\infty$), tendant vers zéro à l'infini convenablement et telle que $\widetilde{K}(X) = K(X)$ pour $-\infty < X < X_0$. Dans ce cas, u(X') est la discontinuité de $\widetilde{K}(Z)$ quand on traverse la coupure. On doit remarquer que l'existence des pôles ne donne pas lieu à des ambiguïtés : si K(X) satisfait les conditions pour que l'équation (12.1) ait une solution, alors les pôles (s'ils existent) sont toujours déterminés par K(X) de façon unique. En principe, u(X) peut être déterminé en faisant une continuation analytique de K(X) au moyen des développements en séries des puissances, à partir de l'intervalle $-\infty < X < 0$, jusqu'à $X_0 < X' < +\infty$ (si l'on sait que l'équation (12.1) a une solution).

D'autre part, en considérant K(X) pour l'intervalle $-\infty < X < -a$, $a \geq 0$ (c'est-à-dire en utilisant seulement une partie de la "donnée", K(X)), on peut résoudre formellement l'équation (12.1) au moyen de quelques méthodes (qui seront étudiées après) et on obtient :

$$u(x',a) = \mathcal{F}[x', x, a]\, K(x) \quad ; \quad x^\circ < x' < +\infty \qquad (12.3)$$

$\mathcal{F}$ étant un opérateur (couramment, une série ou une intégrale) qui dépend des valeurs de K(X) dans $-\infty < X < -a$. $\mathcal{F}$ varie d'une méthode à l'autre. Formellement alors, u(X', a) dépend de a. On doit remarquer que beaucoup de ces méthodes n'utilisent pas la condition d'analyticité pour K(X). Si celle-là n'est pas accomplie, on sait que l'équation n'a pas de solution, donc, l'expression formelle $\mathcal{F}(X', X, a)K(X)$ ne peut pas avoir de sens mathématique (elle peut être divergente ou oscillante) pour aucune valeur de a. D'autre part, si la condition d'analyticité s'accomplit, on sait qu'il existe une solution et alors toutes les expressions formelles $\mathcal{F}(X', X, a)K(X)$ qui sont convergentes et qui définissent une fonction ou distribution qui satisfait l'équation (12. 1) doivent être égales à une seule et unique u(X'), qui ne dépend plus de a. Les différentes $\mathcal{F}$ donneront lieu au processus d'obtention de u(X') qui seront plus ou moins rapidement convergentes. On comprend bien que $\mathcal{F}(X', X, a)K(X)$ doit s'annuler ou ne plus avoir de sens pour $X' < X_0$.

Quelques méthodes pour résoudre l'équation (12. 1) seront révisées et une autre, nouvelle, sera présentée très brièvement.

a) La méthode de Paley et Wiener (49), (50)

$$u(x') = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{\pi \sqrt{X' - X_0}} \sum_{m=0}^{M} \frac{(-)^m}{(2m)!} \left[\pi \sqrt{x' - x_0}\, \frac{d}{dx'}\right]^{2m} \left[\sqrt{x' - x_0}\, K(2x_0 - x')\right] \qquad (12.4)$$

Ici, il faut connaître K(X) pour $-\infty < X < X_0$. L'existence de la limite pour $X' > X_0$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution de l'équation (12. 1).

b) La méthode de Widder (49) consiste à réduire l'équation (12. 1) à deux équations de Laplace

$$K(x) = \int_0^{+\infty} d\upsilon\, f(\upsilon) \exp\left[\upsilon(x - x_0)\right] \qquad (12.5)$$

$$f(\upsilon) = \int_{x_0}^{+\infty} dx'\, \frac{u(x')}{\pi} \exp\left[-\upsilon(x' - x_0)\right] \qquad (12.6)$$

dont les solutions sont, l'une après l'autre :

$$f(v) = -\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q!}\left(\frac{q}{v}\right)^{q+1}\left[\frac{d^q K(x)}{dx^q}\right]_{x=-q/v} \qquad (12.7)$$

$$u(x') = \pi \lim_{q\to\infty} (-)^q \frac{1}{q!}\left(\frac{q}{x'-x_0}\right)^{q+1}\left[\frac{d^q f(v)}{dv^q}\right]_{v=q/(x'-x)} \qquad (12.8)$$

Pour quelques $a(\geq 0)$ et $u(0 < u < +\infty)$ fixes, il y a un nombre entier p_u tel que si $p > p_u$, alors on a $-\frac{p}{u} < -a$. Donc, on voit bien qu'il faut seulement connaître K dans l'intervalle $-\infty < X < -a$ pour avoir la possibilité de trouver f(u) d'abord dans $0 < u < +\infty$ (équation (12.7)) et après u(X') dans $X_0 < X' < +\infty$ (équation (12.8)).

c) La méthode de Bowcock, Cottingham et Williams (51) est très simples :

$$u(x') = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dp\, \sin(p\phi)\sinh(p\pi)\left[\int_0^{+\infty} d\theta\, \cos(p\theta)\,\tilde{K}(\theta)\right] \qquad (12.9)$$

$$\frac{2x' - (x_0 - a)}{x_0 + a} = \cosh\phi \quad , \quad \frac{2x - (x_0 - a)}{x_0 + a} = -\cosh\theta$$
$$\tilde{K}(\theta) = K(x) \qquad (12.10)$$

Ici, il faut connaître K(X) pour $X < -a$ seulement.

d) Les techniques à représentation conforme ont été utilisées souvent (52-56). Ici, on introduira une autre technique, pas très différente des autres déjà utilisées. D'abord, le plan complexe Z doit être transformé sur l'intérieur d'un cercle à rayon unité dans le plan complexe η selon la formule suivante ($b \neq 0$ étant arbitraire) :

$$\eta(z) = \frac{\sqrt{a+z} - b}{\sqrt{a+z} + b} \qquad (12.11)$$

La coupure infinie $X_0 < X < +\infty$ devient alors une coupure finie $\eta(X_0) < \eta < \eta(+\infty) = +1$ tandis que les intervalles $-\infty < X < -a$ et $-a < X < 0$ se transforment sur le cercle à rayon unité ($|\eta| = 1$) et - $< \eta < \eta(0)$ respectivement (voir la figure 6). Soit $F_m(\eta)$, $m = 0, 1, 2 \ldots \infty$ un ensemble infini de fonctions réelles analytiques à l'intérieur du cercle à rayon unité $|\eta| = 1$. On supposera en plus que l'ensemble de $F_m(\eta)$ est complet et orthonormé dans $\eta(X_0) < \eta < +1$ par rapport à la mesure $W(\eta)$ (qui est, de son côté, réelle et analytique dans l'intérieur de $|\eta| = 1$ et

réelle non-négative pour $\eta(X_0) < \eta < +1$) Par exemple, on peut imaginer que des $F_m(\eta)$ sont proportionnelles aux fonctions sin $[2\pi m\lambda]$, cos $[2\pi m \lambda]$,

$$\lambda = \frac{\eta - \eta(X_0)}{1 - \eta(X_0)} .$$

Alors, la fonction $\hat{u}(\eta) = u(X)$ (nous supposons ici qu'elle n'est pas une distribution), peut être développée formellement comme suit :

$$\hat{u}(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m F_m(\eta) \quad \text{pour} \quad \eta(x_0) < \eta < +1 \qquad (12.12)$$

$$a_m = \int_{\eta(0)}^{+1} d\eta\, W(\eta) F_m(\eta) \hat{u}(\eta) \qquad (12.13)$$

On voit bien que les coefficients a_m peuvent être déterminés en appliquant le théorème de Cauchy dans le chemin marqué sur la figure 6, le résultat étant :

$$a_m = -2i \oint_{|\eta'|=1} d\eta'\, W(\eta') F_m(\eta') \hat{K}(\eta') \qquad (12.14)$$

Il faut remarquer que cette méthode utilise la condition d'analyticité (dans ce cas, pour arriver à la formule (12.14)). Ici, on fait usage des valeurs de K(X) pour $-\infty < X < -a$ ($a \geq 0$) seulement. Il est très probable que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation ait une solution est la condition de convergence uniforme de la série (12.12) (qui serait la solution dans ce cas), les coefficients $a_m(\eta)$ étant donnés au moyen de l'équation (12.14). Nous ne nous arrêterons pas ici pour le démontrer. Il semble que cette méthode à représentations conformes est valable si les $F_m(\eta)$ sont réelles et leur ensemble complet et orthonormé, et si $W(\eta)$ est réelle non-négative dans l'intervalle $-1 < \eta < +1$ (par exemple, les $F_m(\eta)$ peuvent être proportionnelles aux polynômes de Tchbicheff, Legendre ou Jacobi)*. Maintenant, on doit avoir la condition

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m F_m(\eta) = 0 \quad \text{si} \quad -1 < \eta < \eta(X_0).$$

---

* Ici, nous remerçions particulièrement Monsieur le Professeur K. CHADAN pour quelques discussions.

CHAPITRE XIII

CONSTRUCTION DE L'AMPLITUDE NON-RELATIVISTE

13 - A - CONSTRUCTION A PARTIR DE $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ DANS TOUTE LA REGION PHYSIQU

Nous allons considérer la condition a) du chapitre 3 et nous allons remplacer les conditions b) et c) exposées par une autre, beaucoup plus forte, qui est la suivante : b') le nombre des zéros N(t) est fini pour $0 \geq t > -\infty$. En plus en adoptant un point de vue phénoménologique et idéalisé, nous allons supposer qu'il existe une amplitude de diffusion non-relativiste f(s,t) qui satisfait aux conditions a) et b'), l'unitarité et, et qui corresponde par ailleurs à une $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s,t)$ donnée avec une précision infinie et sans erreurs sur toute la région physique. Ici, nous allons présenter une méthode pour trouver f(s,t) à partir de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ et de la représentation de module et, en même temps, les restrictions que $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s,t)$ doit accomplir pour que, vraiment, f(s,t) puisse exister sans avoir de contradictions. L'équation d'unitarité est (voir (24), par exemple) :

$$\mathrm{Im} f(s,t) = \frac{1}{4\pi m\sqrt{2ms}} \int_{-8ms}^{0} dt_1 \int_{-8ms}^{0} dt_2 \frac{\theta[K(s,t,t_1,t_2)]}{\sqrt{K(s,t,t_1,t_2)}} \cdot f^*(s,t_1) f(s,t_2) \qquad (13.A.1)$$

$s \geq -t/8m$

$$K(s,t,t_1,t_2) = 2(tt_1 + tt_2 + t_1t_2) - t^2 - t_1^2 - t_2^2 + \frac{tt_1t_2}{2ms} \qquad (13.A.2)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

Cette équation peut être considérée comme une équation intégrale non-linéaire pour obtenir arg f(s,t) pour s fixe à chaque t dans $0 \geq t > -8ms$, à partir de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$. Neuton(13) a montré que si :

$$\sin\varphi \equiv \max\left\{ \frac{1}{4\pi\sqrt{2ms}} \cdot \frac{1}{\frac{d\sigma(s,t)}{d\Omega}} \int_{-8ms}^{0} dt_1 \int_{-8ms}^{0} dt_2 \frac{\theta[K(s,t,t_1,t_2)]}{\sqrt{K(s,t,t_1,t_2)}} \cdot \sqrt{\frac{d\sigma(s,t_1)}{d\Omega} \frac{d\sigma(s,t}{d\Omega}} \right. \qquad (13.A.3)$$

< 0.79

alors il y a un, et seulement un, arg f(s,t), qui satisfait l'équation intégrale (13.A (à l'exception de l'ambiguïté triviale arg f(s,t) → arg f(s,t) + πp, p étant un entier impair) et qui peut être obtenu en faisant des calculs itératifs sur l'équation d'unitarité. La démonstration utilise quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle(13). L'existence d'une solution si $0.79 < \sin\varphi < 1$ a été établie par Martin (13) mais

l'unicité de la solution dans cet intervalle n'a pas été démontrée (même si elle semble très raisonnable). Etant donné que $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s,t)$ est connue pour chaque s, t et en supposant qu'elle satisfait la condition (13.A.3) alors, en faisant un calcul itératif de l'unitarité pour chaque s fixe, on obtient $\arg f(s,t) = [\arg f(s,t)]_1 \cdot (-)^{\ell(s)} + \pi . p(s)$, $[\arg f(s,t)]_1$ étant une solution particulière exacte de l'équation (13.A.1). Les entiers $\ell(s)$ et $p(s)$ (qui sont à la fois pairs ou impairs) sont la réflexion de l'ambiguïté que nous avons mentionné.

Pour accomplir la construction de f(s,t), il faut encore obtenir les pôles correspondants aux états liés, les zéros complexes $K_n(t)$ et $|f(s',t)|$ pour $0 \leq s' < -t/8m$. Pour cela, nous allons écrire l'analogue de l'équation (2.A.7) pour l'amplitude f(s,t) (en faisant l'inclusion des états liés) comme suit :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{s_0} \frac{ds'\, u(s',t)}{s'-s} = K(s,t) \quad , \quad s>s_0 \, , \; 0 \geq t > -8ms \tag{13.A.4}$$

$$s_0 = -t/8m \quad , \quad u(s',t) = \frac{\theta(s')\ln[m\,|f(s',t)|]}{\sqrt{s'}} \tag{13.A.5}$$

$$K(s,t) = \frac{1}{\sqrt{s}} P\int_{s_0}^{+\infty} \frac{ds' \ln\left[m^2 \frac{d\sigma(s',t)}{d\Omega}\right]}{\sqrt{s'}\,(s'-s)} + \pi\, n_0(t) + \sum_{\ell=1}^{B} \ln\left\{\frac{i\sqrt{s_i}+\sqrt{s}}{i\sqrt{s_i}-\sqrt{s}}\right\} +$$

$$\sum_{n=1}^{N(t)} \ln\left\{\frac{\sqrt{s}-K_n(t)/\sqrt{2m}}{\sqrt{s}-K_n(t)^*/\sqrt{2m}}\right\} - [\arg f(s,t)]_1 (-)^{\ell(s)} - \pi p(s) \tag{13.A.6}$$

On voit que, pour chaque t fixé dans $0 \geq t > -\infty$, l'équation (13.A.4) n'est qu'une équation intégrale non-singulière de Stieltjes dans la variable s (voir le chapitre 12). Pour $s > s_0$, les seules inconnues de K(s,t) sont les zéroz $K_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ N(t) (rappelons qu'on a supposé que N(t) est fini !) et les entiers $\ell(s)$, $p(s)$ et $n_0(t)$. La fonction K(s,t) dépend de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, soit à travers l'intégrale à valeur principale, soit à travers $[\arg f(s,t)]_1$ qui, nous le rappelons, a été obtenu par des calculs itératifs de l'équation d'unitarité. Nous avons déjà dit dans le chapitre 12 qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution $u(s',t)$ est la condition d'analyticité de K(s,t) dans la variable s à transfert t fixe. Etant donné que nous supposé <u>l'existence</u> de f(s,t) , on peut en déduire que la solution u(s',t) doit exister et alors que K(s,t) doit satisfaire la condition d'analyticité.

Cette condition et la structure de $K(s,t)$, que l'on peut voir dans l'équation (13.A.6) impliquent qu'il doit avoir beaucoup de compensations entre les différentes parties de $K(s,t)$, à partie desquelles on pourrait trouver les inconnues $K_n(t)$, $\ell(s)$, $p(s)$ et $n_0(t)$. En plus, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ doit être restreinte de telle sorte que cette construction et ces compensations soient possibles. En fait, $[\arg f(s,t)]_1$ doit être la somme de 5 termes : le premier avec une structure analytique dans la variable s qui peut compenser l'intégrale à valeur principale de l'équation (13.A.6) ; le deuxième est une constante dépendante du transfert t ; le troisième et le quatrième compensent les contributions des états liés et des zéros dans $K(s,t)$ respectivement ; le cinquième doit avoir une structure analytique qui soit compatible avec le premier membre de l'équation (13.A.4). Dans ces conditions, l'entier $\ell(s)$ (ou ce qui est vraiment important, sa parité) est déterminé d'une façon unique par la compensation effective de l'intégrale à valeur principale de l'équation (13.A.6) et le premier terme dans $[\arg f(s,t)]_1$. En faisant la comparaison entre le quatrième terme dans $[\arg f(s,t]_1$ et la contribution des zéros, on pourrait obtenir les zéros $K_n(t)$. Finalement, à partir de l'étude du comportement asymptotique ($s \to +\infty$) de l'équation (13.A.4), on voit que, entre $n_0(t)$, $p(s)$ et le deuxième terme dans $\arg f(s,t)_1$ il doit exister une compensation, ce qui impliquerait que les ambiguïtés qu'on a trouvées auparavant dans la phase, n'ont aucune influence sur $K(s,t)$ ou $u(s',t)$. Il est important de bien comprendre que si $[\arg f(s,t)]_1$ avait une structure différente, alors la condition d'analyticité pour $K(s,t)$ dans la variable s, ne serait plus accomplie et $u(s',t)$ et $f(s,t)$ n'existeraient plus. Alors, d'après toutes ces compensations, $K(s,t)$ devient complètement déterminé et l'équation (13.A.4) peut être résolue au moyen des méthodes qu'on a exposées dans le chapitre 12, qui donnent $|f(s,t)|$ dans la région non-physique finie.

Pour comprendre mieux ces raisonnements, nous allons considérer un exemple :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{s_0}\frac{ds'\,u(s')}{s'-s} = \ln\left(\frac{s-3s_0}{s-5s_0}\right) + \pi n_0 + \ln\left[\frac{\sqrt{s}-K_n/\sqrt{2m}}{\sqrt{s}-K_n^*/\sqrt{2m}}\right] - \tag{13.A.7}$$

$$-\left[\arg f(s,t)\right]_1 (-)^{\ell(s)} - \pi p(s) \qquad s > s_0$$

$$\arg f(s,t)\Big]_1 = \ln\left(\frac{s-3s_0}{s-5s_0}\right) + 3\pi + \ln\left[\frac{\Gamma - (1+i)}{\sqrt{s}-(1-i)}\right] - \frac{2}{\pi} Q_0\left[-s+s_0-1\right] \qquad (13.A.8)$$

$Q_0(-s+s_0-1)$ étant la fonction de Legendre de deuxième espèce habituelle, l'ordre zéro, Im $K_n > 0$, $\ell(s)$, n_0 et $p(s)$ étant des entiers. Ici, nous supposerons l'existence d'une fonction $u(s')$ telle que les deux membres de l'équation (13.A.7) s'annulent si $s \longrightarrow +\infty$. On comprend que pour $\ell(s)$, $p(s)$, n_0 et K_n arbitraires, cette équation n'a pas de solution, car la condition d'analyticité pour le membre de droite ne peut pas être accomplie. On comprend que l'existence d'une solution implique les conditions suivantes :

a) $\frac{K_n}{\sqrt{2m}} = 1+i$, b) $\ell(s)$ doit être pair, c) $p(s) - n_0 - 3 = 0$. Alors l'équation (13.A.7) devient :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{s_0} \frac{ds'\, u(s')}{s'-s} = \frac{2}{\pi} Q_0(-s+s_0-1) \qquad (13.A.9)$$

Ce qui accomplit vraiment la condition d'analyticité et dont la solution est trouvée en utilisant la méthode de Bowcock, Cottingham et Williams (voir chapitre 12), ayant comme expression :

$$u(s') = \Theta(-s'+s_0)\,\Theta(s'-s_0+2) \qquad (13.A.10)$$

Même si l'on connaît $\left[\arg f(s,t)\right]_1$, il peut être difficile de le séparer en cinq termes de la façon mentionnée ci-dessus. Alors, pour éviter cette séparation, nous allons introduire une nouvelle méthode pour trouver $K_n(t)$, $p(s)$, $\ell(s)$ et $n_0(t)$. En utilisant une des méthodes formelles pour résoudre l'équation (12.1) qu'on a introduite dans le chapitre 12, on obtient en général,

$$u(s',t) = \mathcal{F}[s',s,a]\,K(s,t) \qquad (13.A.11)$$

Ici, l'opérateur $\mathcal{F}[s',\, s,a]$ utilise les valeurs de $K(s,t)$ pour $s > s_0 + a$ $(a \geq 0)$ mais pas celles pour $s_0 < s < s_0 + a$. Quand $\ell(s)$, $K_n(t)$, $p(s)$ et $n_0(t)$ sont arbitraires, $K(s,t)$ ne satisfait pas la condition d'analyticité dans la variable s, l'équation (13.A.4) n'a pas de solution et alors la solution formelle donnée par l'équation (13.A.4) ne peut pas avoir de sens. Donc, pour les bonnes $\ell(s)$, $K_n(t)$, $p(s)$, $n_0(t)$

(pour lesquel les K(s,t) est analytique), la solution (13.A. 11) a un sens mathématique précis et alors, on a :

$$\mathcal{F}[s',s,a]\,K(s,t)=0 \quad \text{pour } s'<0,\ s>0,\ a>0 \qquad \text{(13.A. 12)}$$

En principe, on peut obtenir les inconnues à partir de cette équation. Donc, comme auparavant, K(s,t) devient complètement déterminée et l'équation (13.A. nous fournit la solution cherchée, $|f(s',t)|$, pour $0 < s' < s_0$. On voit que la consistance de cette méthode et, en particulier, l'indépendance de u(s',t) par rapport à a pose des restrictions assez fortes sur $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ (notez que ces conditions sont différentes de la restriction exprimée dans l'équation (13.A. 3). En faisant ces opérations pour chaque $t \leq 0$, il est compréhensible qu'on arrive bien à construire l'amplitude non-relativiste f(s,t) pour chaque transfert réel non-positif dans le plan complexe s.

13 - B - CONSTRUCTION A PARTIR DE $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ DANS UNE CERTAINE PARTIE DE LA REGION PHYSIQUE

Ici, nous allons supposer qu'il existe une amplitude de diffusion non-relativiste f(s,t) qui accomplit les conditions suivantes : a) elle satisfait la représentation de Mandelstam(57) que nous allons écrire comme suit ($\Gamma_i(t)$ étant les résidus correspondant aux états liés)

$$f(s,t) = f_{BORN}(t) + \sum_{i=1}^{B} \frac{\Gamma_i(t)}{s+s_i} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{ds'\,\mathrm{Im}\,f(s',t)}{s'-s} \qquad \text{(13.B. 1)}$$

$$\mathrm{Im}\,f(s',t) = \sum_{q=1}^{Q} A_q(t)\,\mathrm{Im}\,f(s,t_q) + \frac{A(t)}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dt'\,\rho(s,t')}{A(t')(t'-t)} \qquad \text{(13.B. 2)}$$

$$t_q \leq 0 \quad , \quad q = 1 \dots Q \quad , \quad \mathrm{Im}\,t_q = 0 \quad , \quad Q < +\infty$$

$$A(t) = \prod_{q=1}^{Q} (t-t_q) \quad , \quad A_q(t) = \prod_{\substack{q'=1 \\ q' \neq q}}^{Q} \frac{t-t_{q'}}{t_q - t_{q'}} \qquad \text{(13.B. 3)}$$

lle satisfait l'unitarité et la condition exprimée dans l'équation (13.A.3) ; lle correspond à une certaine $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s,t)$ qui est connue sur un certain domaine $\geq s \geq s_a$, $s_b - s_a \neq 0$, $0 \geq t > -8ms$, de la région physique avec une précision nie. Notre problème consiste à donner une méthode pour trouver f(s,t) conjoin- ent dans les plans complexes s et t. La méthode exposée dans la section 13.A st plus utile ici, alors que la méthode que nous allons présenter maintenant t être appliquée aussi dans la section 13.A. Notez que les conditions sur t) sont ici plus fortes que celles données dans la section précitée.

D'abord, il est compréhensible qu'à partir des données qu'on a sur et en faisant des calculs itératifs dans l'équation (13.A.1) qui exprime l'uni- ité, on peut trouver la phase de l'amplitude de forme unique dans $s_b > s > s_a$, $t > -8ms$, avec une ambiguïté triviale habituelle près : arg f(s,t) = $\left[\arg f(s,t)\right]_1 (-)^{\ell(s)} + \pi p(s)$, $\left[\arg f(s,t)\right]_1$ étant une solution exacte, bien déter- née de l'équation (13.A.1) et les entiers $\ell(s)$ et p(s) exprimant l'ambiguïté nme toujours.

Maintenant, nous allons écrire la relation de dispersion (13.B.1) avec soustraction dans un point $s_c(t)$, à l'intérieur de la région $s_b > s > s_a$, $t > -8ms$, comme suit :

$$f(s,t) \equiv \frac{1}{s - s_c(t)} \left\{ f(s,t) - \frac{s - s_c(t)}{\pi} P_c \int_{s_a}^{s_b} \frac{ds' \, \mathrm{Im} f(s',t)}{[s' - s_c(t)](s' - s)} - f(s_c(t),t) \right\} =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_a} \frac{ds' \, \mathrm{Im} f(s',t)}{[s' - s_c(t)](s' - s)} + \frac{1}{\pi} \int_{s_b}^{+\infty} \frac{ds' \, \mathrm{Im} f(s',t)}{[s' - s_c(t)](s' - s)} \qquad (13.B.4)$$

symbole P_c indique que l'intégrale correspondante est une intégrale à valeur ncipale au point $s' = s_c(t)$. En plus, on a pour $-\infty < s' < 0$:

$$\mathrm{Im} f(s',t) = \pi \sum_{i=1}^{B} \frac{\Gamma_i(t)}{-s_c(t) + s_i} \delta[s' + s_i] \qquad (13.B.5)$$

Grâce à l'équation (13.B.4) la fonction g(s,t) est connue sur le domai- $s_b > s > s_a$, $0 \geq t > -8ms$, à l'exception de l'ambiguïté que nous avons remarquée. utre part, l'existence de f(s,t) entraîne celle de g(s,t) et l'analyticité de cette nière fonction (impliquée d'une manière évidente par l'équation (13.B.4)) nous que qu'il doit exister des entiers p(s), $\ell(s)$ pour lesquels l'analyticité de g(s,t) st pas contradictoire avec la structure de l'équation (13.B.4). Nous ne donne-

rons pas plus de détails car on peut faire ici un argument pareil à celui fait dans la section 13.A. Pour des $\ell(s)$ et $p(s)$ quelconques, la structure analytique de $g(s,t)$ n'est pas compatible avec l'équation (13.B.4). Donc, pour ces $\ell(s)$ et $p(s)$ spéciaux, on a une fonction $g(s,t)$ complètement déterminée.

L'étape suivante est la détermination de Im $f(s',t)$ pour $-\infty < s' < s_a$ et $s_b < s' < +\infty$, pour chaque t fixe avec $0 \geq t \geq -8ms$. Nous allons réduire ce problème à une équation de Stieltjes. Pour celà, nous faisons une transformation conforme

$$w = -w_0 \frac{s_b - s}{s - s_a} \quad , \quad s = \frac{w s_a - w_0 s_b}{w - w_0} \tag{13.B.6}$$

entre les plans complexes s et w, ce qui est représenté sur la figure 7. On voit bien que les équations (13.B.4) deviennent, pour chaque t à $0 \geq t > -8ms_b$, l'équation de Stieltjes suivante :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dw' \, U(w',t)}{w' - w} = K(w,t) \tag{13.B.7}$$

où $K(w,t) = \frac{w_0(s_b - s_a)}{[w_c(t) - w_0][w - w_0]} g(s,t)$ est complètement connue sur l'intervalle $-\infty < w < 0$ ($w_c(t)$ étant le point transformé de $s_c(t)$) et $u(w',t)$ étant $U(w',t) = \frac{\text{Im } f(s',t)}{w' - w_c(t)}$ qui est la fonction inconnue.

L'existence de $f(s,t)$ implique que $K(w,t)$ va accomplir la condition d'analyticité sur l'intervalle $-\infty < w < 0$, donc $u(w',t)$ existe et peut être trouvée par les méthodes exposées dans le chapitre 12. La solution $u(w',t)$ doit s'annuler pour $w_0 < w' < w^0$, à l'exception des points correspondants aux états liés (l'intervalle $w_0 < w' < w^0$ étant la transformée de $-\infty < s' < 0$, comme le montre la figure 7). Une fois de plus, on trouve que les données expérimentales, à savoir $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, doivent être restreintes d'une façon telle que la méthode de construction ne doit pas avoir des contractions internes.

Après avoir obtenu $u(w',t)$, les résidus aux états liés $\Gamma_i(t)$, $f_{BORN}(t)$ et $f(s,t)$ sont complètement déterminés pour s quelconque et pour chaque transfert dans l'intervalle $0 \geq t \geq -8ms_b$. Jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé vraiment

s propriétés d'analyticité de Im f(s,t), dans la variable t, mais seulement lles dans l'énergie s. C'est ici qu'on va tenir compte des propriétés contenues ns l'équation (13.B.2) pour trouver f(s,t) dans l'intervalle $-8m\, s_b > t > -\infty$. En fet, à partir de l'équation (13.B.2), on obtient :

$$\rho(s,t) \equiv \frac{\mathrm{Im} f(s,t) - \sum_{q=1}^{Q} A_q(t)\, \mathrm{Im} f(s,t_q)}{A(t)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dt'\, \rho(s,t')}{A(t')(t'-t)} \qquad (13.B.8)$$

our chaque $s \geq 0$, la consistance des manipulations antérieures implique l'exis- nce de $\varphi(s,t)$ dont la structure analytique est déterminée par les équations. En oisissant les points t_q dans l'intervalle $0 \geq t > -8m\, s_b$, on comprend que $\varphi(s,t)$ t déterminé complètement sur l'intervalle $0 \geq t > -8m\, s_b$. La seule ambiguïté i reste est Q : nombre minimum de soustractions dans la représentation Mandelstam. L'équation (13.B.8) n'est pas encore une équation du type ieltjes, car on ne connaît pas $\varphi(s,t)$ sur l'intervalle $-\infty < t < -8m\, s_b$ pour s fixe ≥ 0. Mais on peut faire une nouvelle transformation conforme :

$$\xi = \xi_0 \frac{t}{t + 8m s_b} \quad , \quad \xi_0 > 0 \qquad (13.B.9)$$

partir de laquelle l'équation (13.B.8) est transformée en une véritable équation Stieltjes :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\xi' \frac{U(\xi',s)}{\xi'-\xi} = K(\xi,s) \qquad (13.B.10)$$

$$K(\xi,s) = \frac{(\xi_0 2m s_b)^{Q+1/2}\, \varphi(s,t)}{(\xi-\xi_0)\prod_{q=1}^{Q}(\xi_q-\xi_0)} \qquad (13.B.11)$$

es ξ_q étant les transformées des t_q). $K(\xi, s)$ est complètement connue à l'ex- ption de l'ambiguïté dans Q, que nous allons résoudre tout de suite. La fonction connue est

$$U(\xi',s) = \frac{\varphi(s,t)(\xi'-\xi_0)^{Q-1}}{\prod_{q=1}^{Q}(\xi'-\xi_q)} \qquad (13.B.12)$$

ne fois de plus, puisque f(s,t) existe, il existe aussi un entier Q tel que $K(\xi, s)$ complit la condition d'analyticité et il existe une solution, à savoir, $\rho(s,t')$

pour $0 < t' < +\infty$, et pour chaque s fixe dans $0 \leq s$. Cette dernière fonction est obtenue à partir de la solution de l'équation (13.B.10) qui peut être calculée au moyen des méthodes introduites dans le chapitre 12. Ces méthodes de solution doivent donner des solutions convergentes, avec un sens mathématique précis, pour Q plus grand ou égal au nombre minimum des soustractions dans la représentation de Mandelstam. Ceci nous permet de résoudre la seule ambiguïté, Q, qui restait. Donc, la construction effective de l'amplitude non-relativiste f(s,t) dans les plans complexes s et t est finalement accomplie. Par conséquent $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s,t)$ pour s,t hors de la région $s_b \geq s \geq s_a$, $0 \geq t > -8m\ s$ est déterminée de façon unique et complète à partir de la connaissance de $\frac{d\sigma}{d\Omega}(s,t)$ à l'intérieur de ce dernier domaine.

13 - C - CONSTRUCTION A PARTIR DE $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ A ENERGIE INFINIE

Ici, nous allons montrer que la connaissance de la section efficace à énergie infinie, $\frac{d\sigma(\infty,t)}{d\Omega}$ et le signe de $f_{BORN}(t)$ pour $0 \geq t > -\infty$ nous permet de trouver l'amplitude f(s,t). En effet, en faisant la transformée de Fourier de l'équation (3.4) et en utilisant :

$$f_{BORN}(t) = (-)^{n_\infty(t)} \sqrt{\frac{d\sigma(\infty,t)}{d\Omega}} \qquad (13.C.$$

($n_\infty(t)$ étant un entier) on obtient

$$V(r) = -\frac{1}{2\pi m r} \int_{-\infty}^{0} dt\, \sin\left(\sqrt{-t}\, r\right) (-)^{n_\infty(t)} \sqrt{\frac{d\sigma(\infty,t)}{d\Omega}} \qquad (13.C.$$

Donc, en utilisant l'équation de Schroëdinger avec cette expression pour v(r) on peut obtenir l'amplitude. Ici, $\frac{d\sigma(\infty,t)}{d\Omega}$ est assez arbitraire, les seules restrictions sur elle étant l'existence de l'intégrale et le fait que l'amplitude f(s,t) satisfait l'équation (3.4) quand $s \to +\infty$ et $t \leq 0$.

Si, par ailleurs, on sait que v(r) est un potentiel du type yukawien :

$$V(r) = \frac{1}{r} \int_{\lambda_0}^{+\infty} d\lambda\, \sigma(\lambda)\, e^{-\lambda r} \quad , \quad \lambda_0 > 0 \qquad (13.C.$$

CONCLUSIONS ET REMARQUES FINALES

Au cours de cette étude, nous avons accompli les solutions es différents problèmes (1 à 7) proposés dans l'introduction. Ainsi, nous avons ait une étude qui nous paraît approfondie, de la représentation de module pour ne diffusion non-relativiste et pour les diffusions élastiques relativistes pion- ucléon et nucléon-nucléon, ainsi que de leurs applications possibles. Nous vons, en particulier, considéré comment il était possible de résoudre les diffé- entes difficultés qui ont apparu successivement, en relation avec les zéros omplexes, la région non-physique, le spin, etc... Nous avons établi quelques ouvelles règles de somme qui relient les zéros complexes à la contribution de a région non-physique et aux données expérimentales. Nous avons étudié aussi n particulier la construction des amplitudes de diffusion : a) quand il faut tenir ompte des erreurs et du fait qu'il y a un nombre fini de données (cas réel),) lorsqu'on suppose que toutes les données ont une précision infinie et qu'elles ont en nombre infini, avec la puissance du continu (cas idéal).

Notre but n'était pas de démontrer l'existence des amplitudes ui satisfont les principes de la théorie de la matrice S. Tout simplement, en upposant que ces amplitudes existent, nous avons cherché à les trouver à partir es données expérimentales. Il se trouve que les données ne peuvent pas être rbitraires, si les méthodes de construction ne sont pas contradictoires.

Alors, les données expérimentales qui résultent des différentes xpériences pour diverses énergies et plusieurs transferts d'impulsion, doivent re reliées entre elles grâce à l'analyticité d'une part,(qui implique une relation ıtre le module et la phase d'une amplitude) et l'unitarité d'autre part, (qui im- ique une nouvelle relation). En conséquence, lorsque ces restrictions sont complies, les amplitudes peuvent être trouvées au moyen des méthodes présen- es ici, soit, dans le cas idéal considéré, de précision infinie, soit dans le cas el, où il y a des erreurs. Par ailleurs, on trouve que si la section efficace dif- rentielle est connue avec une précision infinie dans quelques régions $\mathcal{D}$ convena- s, aussi petites qu'on veut, elle détermine les sections efficaces différentielles rtout, au-délà de $\mathcal{D}$.

on peut trouver la mesure réelle $\sigma(\lambda)$ comme suit . En identifiant les équations (13.C.3) et (13.C.2) on arrive à

$$\frac{1}{\pi}\int_{\lambda_0}^{+\infty} d\lambda\, \sigma(\lambda)\, e^{-r(\lambda-\lambda_0)} = -\frac{e^{-\lambda_0 r}}{2m\pi^2}\int_{-\infty}^{0} dt\, \sin\left(\sqrt{-t}\, r\right)(-)^{n_\infty(t)}\sqrt{\frac{d\sigma(\infty,t)}{d\Omega}} \quad (13.C.$$

ce qui est une équation intégrale de Laplace, dont le membre à droite est connu et l'inconnue est $\sigma(\lambda)$. La solution générale de cette équation a été donnée dans les équations (12.7.8) ; alors, $\frac{d\sigma(\infty,t)}{d\Omega}$ et $n_\infty(t)$ doivent être restreintes de telle façon que les limites faites aux équations existent. Par ailleurs, en combinant cette $\sigma(\lambda)$ que nous avons trouvée avec l'unitarité et la représentation de Mandelstam, on peut trouver l'amplitude non-relativiste d'une manière déjà bien connue (57).

REFERENCES

) Voir, par exemple, G. Hohler, G. Ebel, Nucl. Phys. 48, 470 (1963)
G. Hohler, G. Ebel, J. Giesecke, Zeits. für Physik 180, 430 (1964)

) Voir, par exemple, G. Giacomelli, P. Pini et S. Stagni, CERN-HERA, 69-1

) C. Lovelace, R.M. Heinz, A. Donnachie, Phys. Lett. 22, 332 (1966)

) J. Hamilton dans "Strong Interactions and High Energy Physics", Ed. R.G. Moorhouse, Oliver et Boyd, 1964 et références

) A. Donnachie dans "Particle Interactions at High Energies", Ed. T.W. Preist et L.L.J. Vick, Ed. Oliver et Boyd (1967)

) J.S. Toll, Phys. Rev. 104, 1760 (1956)

) A.F. Ranada, J. Math. Phys. 8, 2321 (1967)

) J.E. Bowcock, T. Kanellopoulos, Nucl. Phys. B4, 417 (1968)

) T.N. Truong, R. Vinh Mau, P.X. Yëm, Phys. Rev. 172, 1645 (1969)
et T.N. Truong, R. Vinh Mau, Phys. Rev. 177, 2494 (1969). Pour un résumé, voir M. Gourdin "Electron-Positron Annihilations into Hadrons", section B, Orsay, Juin 1969

0) R.F. Alvarez-Estrada, Ann. of Phys. 54, 276 (1969)

1) R. Odorico, Il Nuovo Cimento, 54A , 96 (1968)

2) S. Jorna, J.A. Mc Clure, Nucl. Phys. B13, 68 (1969)

3) A. Martin, Il Nuovo Cimento, 59A , 131 (1969, R.G. Newton, J. Math. Phys. 9, 2050 (1968)

4) R. Omnès, Il Nuovo Cimento, 8, 316 (1958)

5) M. Sugawara, A. Tubis, Phys. Rev. Let. 9, 355 (1962) ; Phys. Rev. 130, 2127 (1963)

6) Y.S. Jin, S. W. Mac Dowell, Phys. Rev. 138 , B 1279 (1965)

7) R.J. Eden "High energy collisions of elementary particles", Cambridge University Press, 1967

8) C.B. Chiu, R.J. Eden, C.I. Tan, Phys. Rev. 170, 1490 (1968)

9) F.J. Yndurain, Nucl. Phys. B15, 89 (1970)

0) B. Bargmann, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, 38, 961 (1952)

1) V. de Alfaro, T. Regge "Potential scattering", North Holland, 1965, ch. 10

2) R.J. Eden : "Particle Interactions at high energies", Ed. T.W. Preist et L.L.J. Vick, Oliver et Boyd, 1967

3) M. Froissart, M.L. Goldberger, K.M. Watson, Phys. Rev. 131, 2820 (1963)

(24) Voir, par exemple, M.L.Goldberger, K.M.Watson : "Collision Theory, Ed.John Wiley and Sons, 1964

(25) G.F.Chew, M.L.Goldberger, F.E. Low, Y.Nambu, Phys.Rev. 106, 1337(195

(26) J.Hamilton, W.S. Woolcock, Rev.Mod.Phys. 35, 737 (1963)

(27) A.Kotanski, Acta Physica Polonica, 29, 699 (1966), 30, 629 (1966)

(28) W.R.Frazer, J.R.Fulco, Phys.Rev.117, 1603 (1960)

(29) P.A.Carruthers, J.P.Krisch, Ann. of Phys. 33, 1 (1965)

(30) Voir par exemple (17) ou A.Martin "Scattering theory: Unitarity, Analyticity and Crossing", Lecture Notes in Physics Springer Verlag

(31) J.L.Gervais, F.J.Yndurain, Phys.Rev. 167, 1289 (1968)

(32) J.L. Gervais, Phys.Rev. 182, 1605 (1969)

(33) J.A. Mc Clure, S.Jorna, Il Nuovo Cimento, 67A , 667 (1970)

(34) K.J.Foley, R.S.Gilmore, R.S.Jones, S.J.Lindenbaum, W.A.Love, S.Ozaki, E.H.Willen, R.Yamada, L.C.L.Yan, Phys.Rev.Letters, 14, 862 (1965)

(35) J.V. Allaby et al. Phys.Letters 30B, 500 (1969)

(36) S. Ciulli, Il Nuovo Cimento, 61A , 787 (1969) et 62A, 301 (1969) ; R.E.Cutkosk B.B. Deo, Phys.Rev.Letters, 22, 1272 (1968) ; Phys.Rev. 174, 1859 (1968)

(37) Voir D.J.Herndon, A.Barbaro-Galtieri, A.H.Rosenfeld "πN partial wave amplitudes, a compilation" UCRL 20030, Fév. 1970

(38) J. Pisut, P. Presnajder, Nucl.Phys. B12 , 110 (1969)

(39) L. Wolfenstein, Phys.Rev. 96, 1654 (1954)

(40) J.Hamilton, T.DSpearman, Ann. of Phys.12, 172 (1961)

(41) G.Sommer, Il Nuovo Cimento, 52A, 373 (1967)

(42) Voir, par exemple, L. Van Hove, "Topics on Regge-Pole theory of high energ scattering", CERN 68-31

(43) M.J.Moravcsik, "The two-nucleon interaction", Clarendon Press 1963

(44) Richard Wilson, "The nucleon-nucleon interaction, experimental and phenome logical aspects". Interscience Tracts, John Wiley and Sons

(45) F. Lehar, P.Winternitz, Fortschritte der Physik, 15, 495 (1967)

(46) Voir par exemple, "The 1967 Conference on the Nucleon-Nucleon interaction" publiée dans Rev.Mod.Phys.39 (1967)

(47) M.L.Goldberger, M.T.Grisaru, S.W.Mc Dowell, D.Y.Wong, Phys.Rev. 120 2250 (1960

(48) C.R.Schumacher, H.A.Bethe, Phys.Rev. 121, 1534 (1961)

(49) R.E.A.C. Paley, N.Wiener, "Fourier transforms in the Complex Domain, par. 14, New York, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 19 (1934)

(50) H. Pfister, Zeits. für Physik, 211, 176 (1968)

(51) J. E. Bowcock, W. N. Cottingham, J. G. Williams, Nucl. Phys. B3, 95 (1967)

(52) W. R. Frazer, Phys. Rev. 123, 2180 (1961)

(53) D. Atkinson, Phys. Rev. 128, 1908 (1962)

(54) C. Lovelace, Il Nuovo Cimento, 25, 732 (1962)

(55) J. S. Levinger, R. F. Peirls, Phys. Rev. 134, B 1314 (1964)
J. S. Levinger, C. P. Wang, Phys. Rev. 136, B733 (1964) et 138, B1207 (1965)

(56) J. Pisut, P. Presnajder, Nucl. Phys. B14, 489 (1969)
J. Pisut, P. Presnajder, I. Fisher, Nucl. Phys. B12 (1969)

(57) R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, N. N. Khuri, S. B. Treiman, Ann. of Phys. 10, 62 (1960).

SOUS-TITRES AUX FIGURES

Figure 1 : Le rayon du demi-cercle tend vers $+\infty$.

Figure 2 : $s = \sqrt{|(x - x_2)(x - x_2)|}$.

Figure 3 : La première feuille du plan complexe s se transforme en Im $K \geq 0$.

Figure 4 : Le diagramme $\nu - t$ de Mandelstam pour les différentes voies. Les courbes $\nu = \nu_0(t)$ et $\nu = -\nu_0(t)$ (ν_0 étant donné à l'équation (4.A.6)) correspondent aux diffusions $\pi^- p \to \pi^- p$ et $\pi^+ p \to \pi^+ p$ vers l'arrière respectivement.

Figure 5 : Les régions $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_u$. Les lignes PQ et RS correspondent à s = constant et u = constant respectivement.

Figure 6 : Le cercle à rayon unité dans le plan complexe η.

Figure 7 : Les intervalles avec dessins similaires se transforment entre eux. Les petits cercles correspondent aux états liés ($w^0 = w_0 \frac{s_b}{s_a}$).

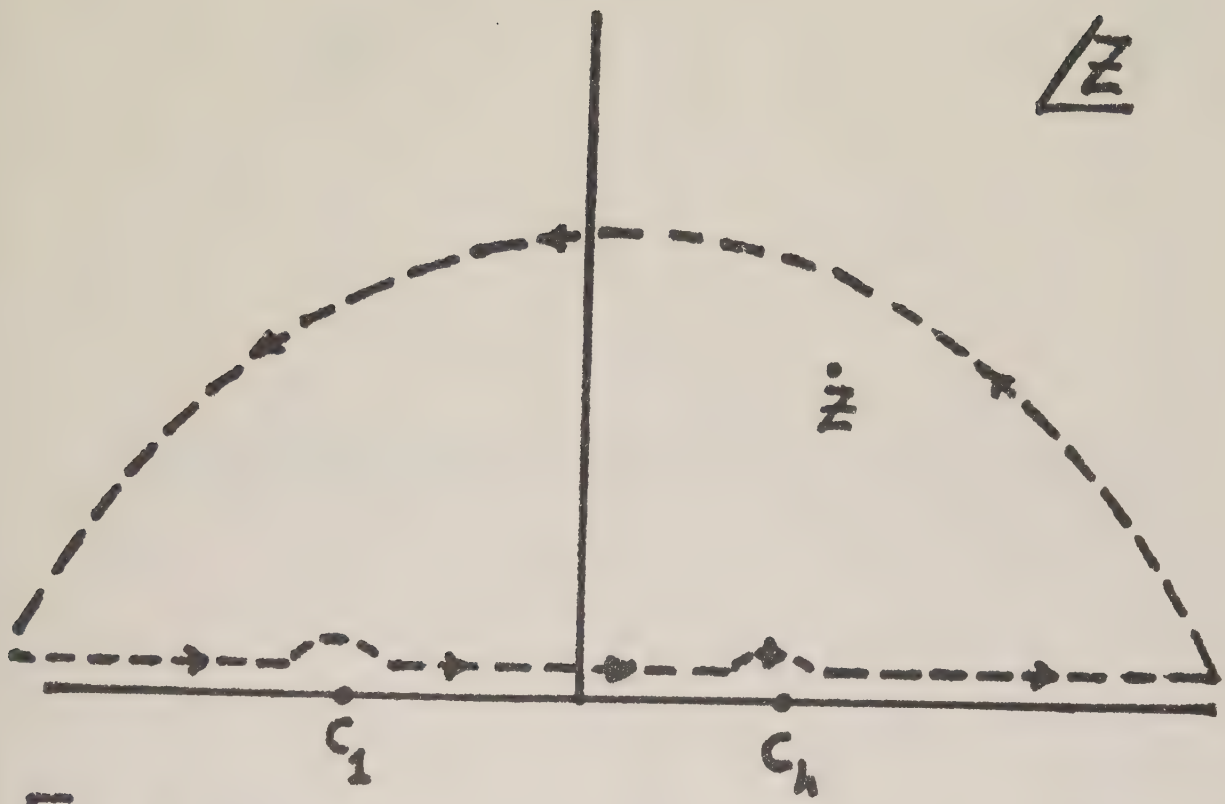

Fig.1

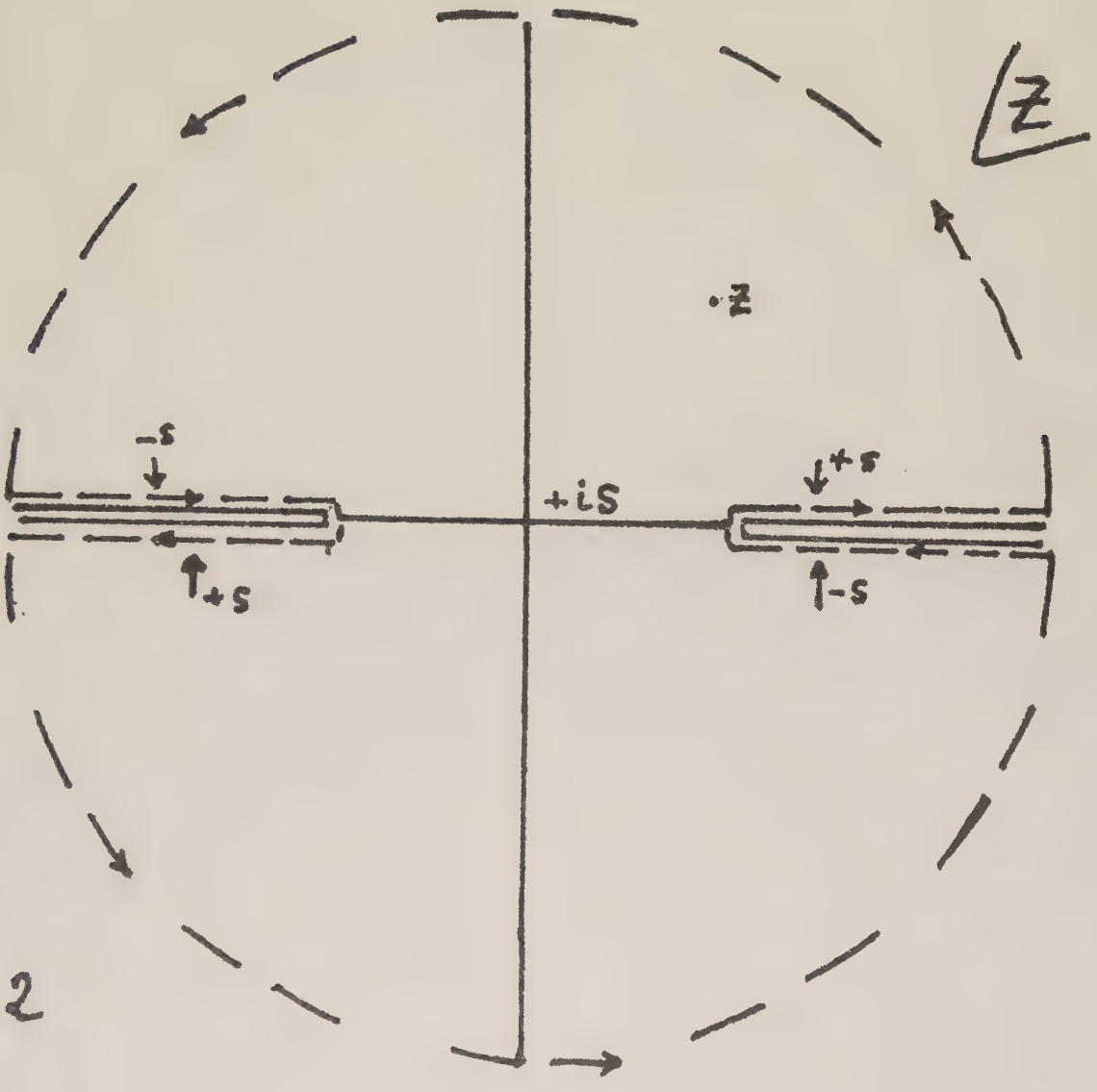

Fig. 2

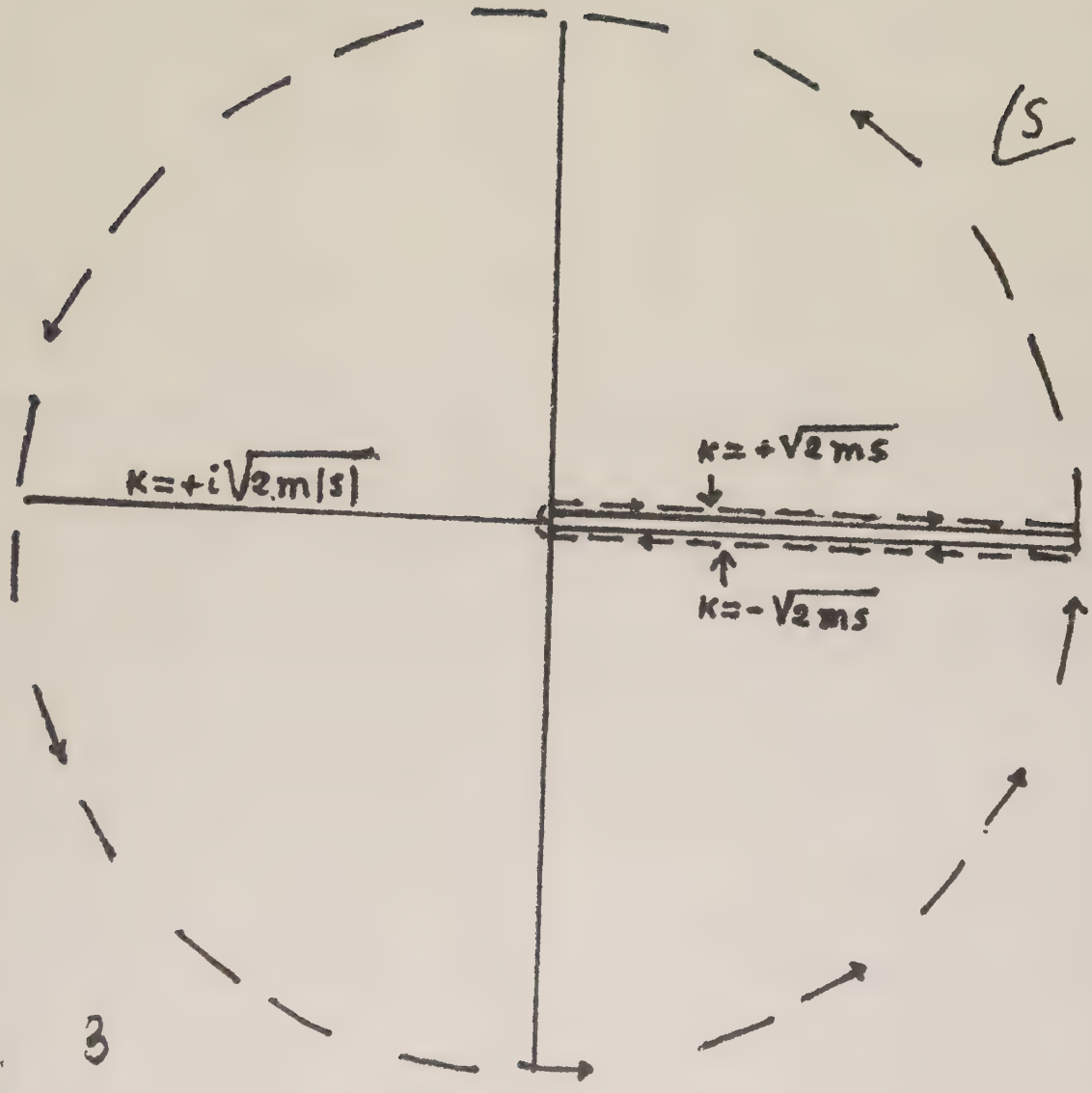

Fig 3

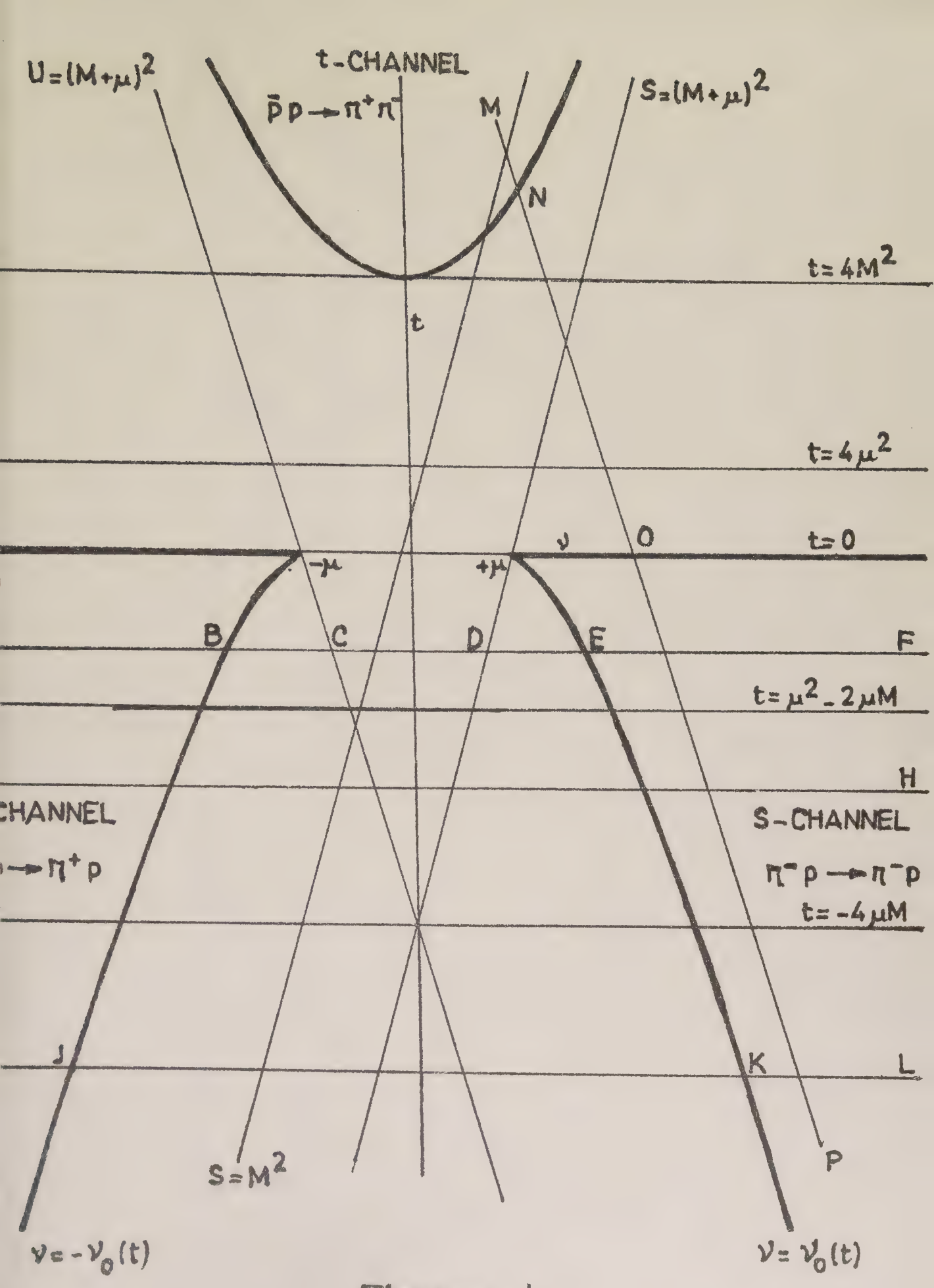
U=(M+μ)²
t-CHANNEL
p̄p → π⁺π⁻
M
S=(M+μ)²
N
t=4M²
t
t=4μ²
ν
O
t=0
-μ
+μ
B
C
D
E
F
t=μ²-2μM
H
CHANNEL
→ π⁺p
S-CHANNEL
π⁻p → π⁻p
t=-4μM
J
K
L
S=M²
P
ν=-ν₀(t)
ν=ν₀(t)

Figure 4

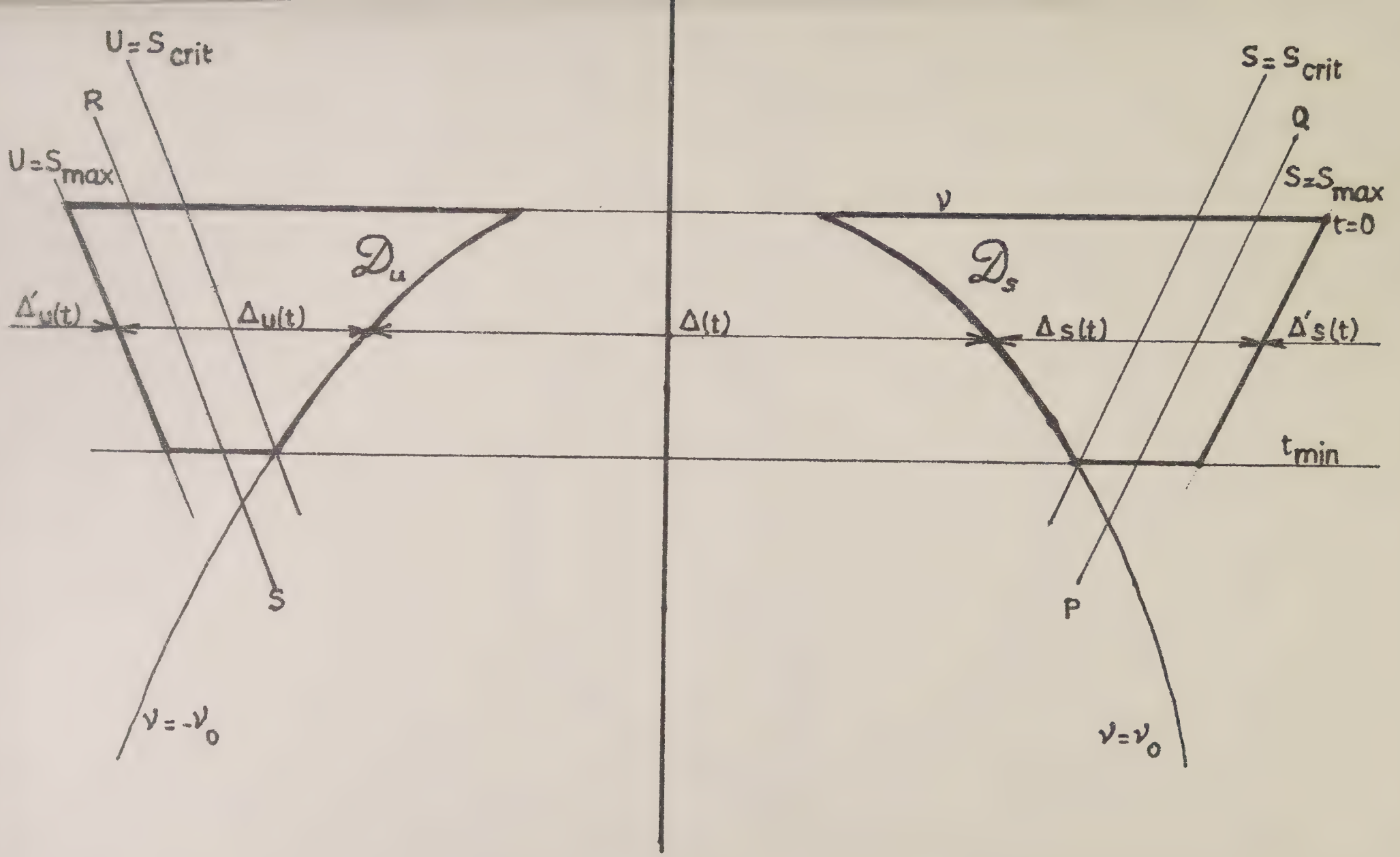
U=S crit
R
U=S max
S
ν=-ν0
Du
Δ'u(t)
Δu(t)
Δ(t)
S=S crit
Q
S=S max
ν
t=0
Ds
Δs(t)
Δ's(t)
tmin
P
ν=ν0

Figure 5

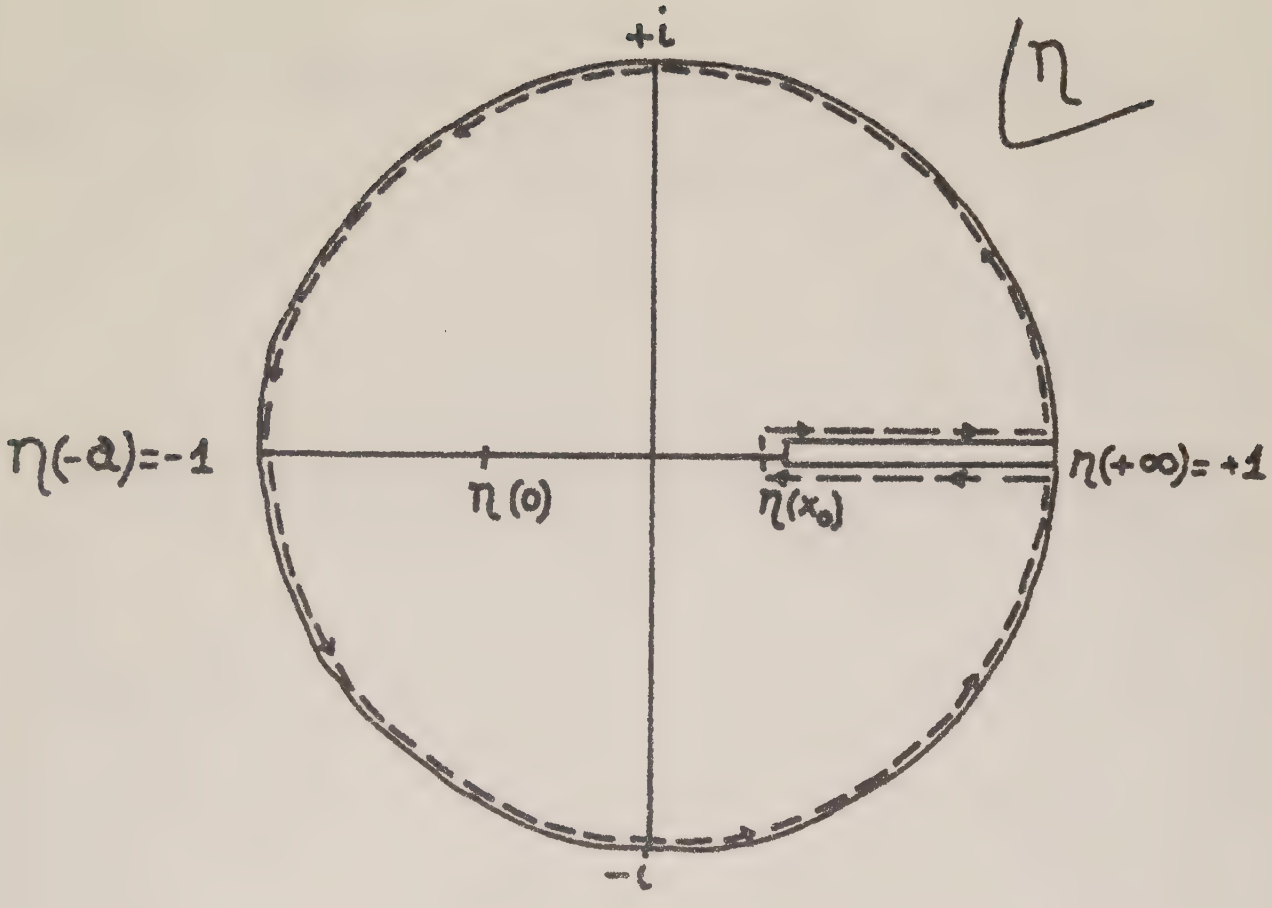

Fig. 6

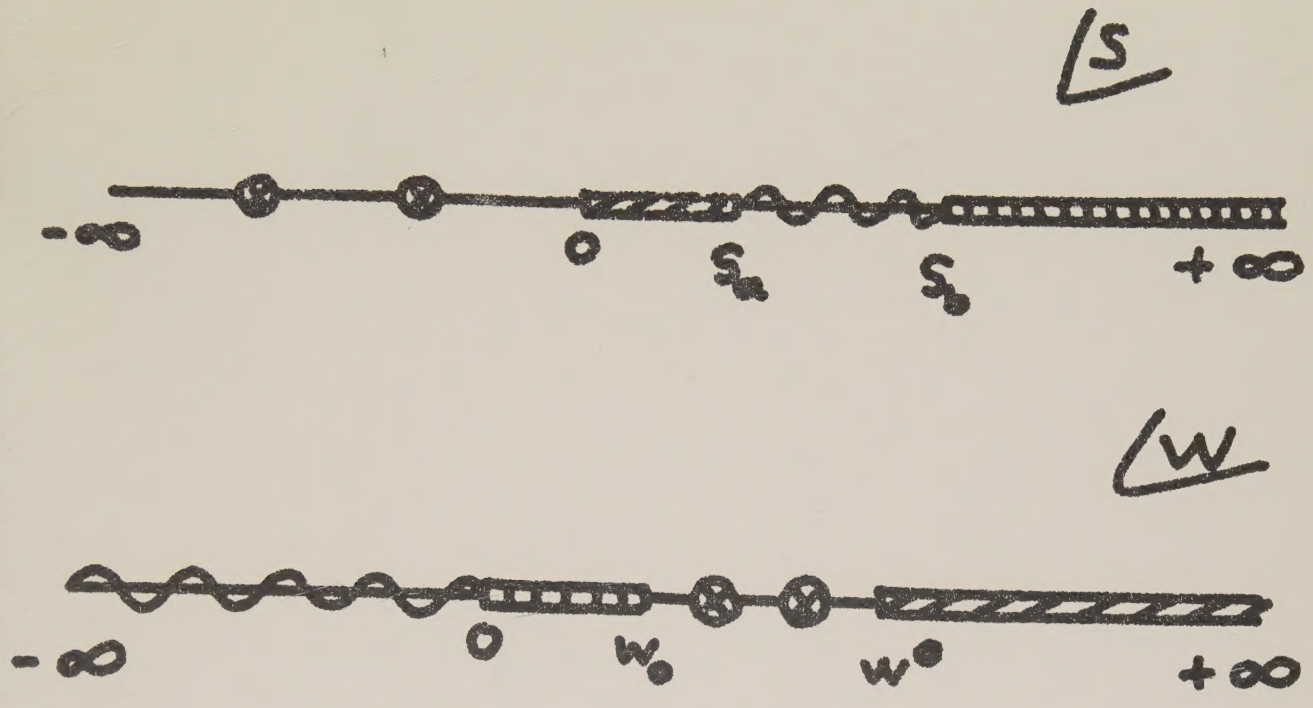

Fig. 7